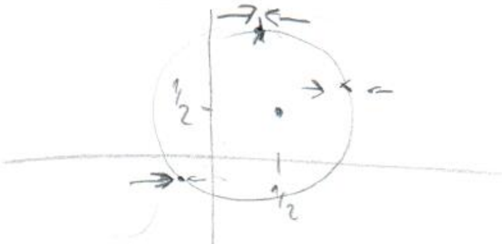
$$f(x,y) = \min\{x^2+y^2,\ x+y+1\}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$



$$x^2+y^2 = x+y+1$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

$$f = \begin{cases} x^2+y^2 & M_1=\{x^2+y^2 \le x+y+1\} \text{ (vnitřek kruhu)} \\ x+y+1 & M_2\{x^2+y^2 \ge x+y+1\} \text{ (vnějšek kruhu)} \end{cases}$$

Derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x & \text{na } M_1 \\ 1 & \text{na } M_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2y & M_1 \\ 1 & M_2 \end{cases}$$

Derivace na hranici

Zvolme $[x_0,y_0]$: $x_0^2+y_0^2 = x_0+y_0+1$; $x_0 > \frac{1}{2}$ $\quad x_0+y_0+1$ $\parallel$

$$\frac{\partial f}{\partial x}[x_0,y_0] = \lim_{t\to 0} \frac{\min\{(x_0+t)^2+y_0^2 \,;\, (x_0+t+y_0+1)\} - (x_0^2+y_0^2)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{(x_0+t+y_0+1) - (x_0+y_0+1)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{t}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0-} \frac{(x_0+t)^2+y_0^2 - (x_0^2+y_0^2)}{t} = \lim_{t\to 0-} \frac{t^2+2x_0t}{t} = 2x_0$$

pro $x_0 < \frac{1}{2}$ 

vyjde opačně: zleva $= 1$

zprava $= 2x_0$

pro $x_0 = 1/2$ $\quad y_0 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}/2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{x_0 + t + y_0 + 1 - (x_0 + y_0 + 1)}{t} = \underline{\underline{1}}$$

- Zvolme (x_0, y_0): $\quad x_0^2 + y_0^2 = x_0 + y_0 + 1$; $\quad y_0 > 1/2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\min\{x_0 + (y_0+t)^2 ; x_0 + (y_0 + t) + 1\} - \overbrace{(x_0^2 + y_0^2)}^{x_0 + y_0 + 1}}{t}$$

$$\lim_{t \to 0+} \frac{(x_0 + y_0 + t + 1) - (x_0 + y_0 + 1)}{t} = 1$$

$$\lim_{t \to 0-} \frac{x_0^2 + (y_0 + t)^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{t} = \lim_{t \to 0-} \frac{t^2 + 2ty_0}{t} = 2y_0$$

pro $y_0 < \frac{1}{2}$ $\quad \begin{cases} 2y_0 & \text{zprava} \\ 1 & \text{zleva} \end{cases}$

pro $y_0 = \frac{1}{2}$ $\quad x_0 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}/2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{x_0 + y_0 + t + 1 - (x_0 + y_0 + 1)}{t} = \underline{\underline{1}}$$

- Tečna v $[0, 1]$; $\quad z_0 = 1$ (verze $x_0^2 + y_0^2$) $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$

$$z - 1 = 0 \cdot (x - 0) + 2(y - 1)$$

$$0 = \underline{2y - z - 1}$$

$\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2$$
$$+ \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2}$$
$$-(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)}$$
$$- \cos x - \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

Příklad I4 : Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$H_1 = \{[x, 0];\ x \in \langle 0, 1\rangle\},$$
$$H_2 = \{[0, y];\ y \in \langle 0, 1\rangle\},$$
$$H_3 = \{[x, y];\ x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Je-li $[x, y] \in H_1$, platí $f(x, y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0, 0]$ a $[0, 1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1 + x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$\frac{1}{1 + y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2 + xy + y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body:

$$[0,0], \qquad [0,1], \qquad [1,0], \qquad [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proveďte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0,0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Příklad I5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+2x+4} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{t^2-4}{2(1-t)}, \qquad dx = \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\,dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{t^2-4}{2(1-t)}}{\frac{t^2-4}{2(1-t)}+t} \cdot \frac{-t^2+2t-4}{2(1-t)^2}\,dt = \int \frac{t^2-4}{2t^2-4t+2}\,dt$$

Platí

$$\frac{t^2-4}{2t^2-4t+2} = \frac{1}{2} + \frac{2t-5}{2t^2-4t+2}$$

Rozložíme-li poslední výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-4}{2t^2-4t+2}\,dt &= \int \frac{1}{2}\,dt + \int \frac{1}{t-1}\,dt - \int \frac{3}{2(t-1)^2}\,dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}t + \log|t-1| + \frac{3}{2(t-1)}, \qquad t \in (-\infty, 1) \text{ nebo } t \in (1, +\infty).\end{aligned}$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+4}}\,dx &= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+2x+4} - x) \\ &+ \log|\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1| + \frac{3}{2(\sqrt{x^2+2x+4} - x - 1)}, \qquad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Příklad D2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x, y]$, kde $xy \neq 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x^2-y} \cdot 2x + \operatorname{sgn}(xy) \cdot y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -e^{x^2-y} + 7 + \operatorname{sgn}(xy) \cdot x.$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $xy = 0$. Z věty o aritmetice limit plyne, že funkce f má parciální derivaci podle x (resp. podle y) v bodě $[x, y]$ právě tehdy, když ji tam má funkce $g : [x, y] \to |xy|$ (je totiž $f - g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$). Počítejme derivace funkce g v bodech $[x, 0]$, $x \in \mathbb{R}$, a $[0, y]$, $y \in \mathbb{R}$, podle definice:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x + t, 0) - g(x, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(x, t) - g(x, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|xt|}{t} = \lim_{t\to 0} |x| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $x = 0$, a v tomto případě je nulová.

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0, y + t) - g(0, y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t, y) - g(0, y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|ty|}{t} = \lim_{t\to 0} |y| \operatorname{sgn} t.$$

Poslední limita existuje, právě když $y = 0$, a v tomto případě je nulová.

Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[0, y];\ y \in \mathbb{R},\ y \neq 0\},$$
$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, 0];\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1/e + 16 + (2/e + 2) \cdot (x - 1) + (8 - 1/e) \cdot (y - 2).$$

Příklad D3 : Položme

$$F(x, y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1) + x\varphi(x) = 0,$$

$$\frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-1}{(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2$$
$$+\frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2}$$
$$+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0,$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

Příklad D4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0]$, $[0,0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M.

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x = 0,\ y \in [-2,2]\},$$
$$H_2 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x < 0\}.$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0,2]$, $[0,-2]$, $[0,0]$, protože $f(0,y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 4, \tag{1}$$
$$2x + 4x^2 = \lambda 2x, \tag{2}$$
$$-2y = \lambda 2y. \tag{3}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body

$$[0,2],\ [0,-2],\ [-1,\sqrt{3}],\ [-1,-\sqrt{3}].$$