(1)

(389) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx.$$

Řešení:

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \cdot \sin^2 x \, dx \;\left|\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array}\right| =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right)^2 t^2 \, dt = \int \left(t^2 - 2t^4 + t^6\right) dt = \frac{t^3}{3} - 2\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Příklady

Najděte primitivní funkce k následujícím funkcím na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

2. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$

Řešení: Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = (t^2+1)\, dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \int \frac{t^5}{t^2+1}\, dt = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{2}\ln(1+\operatorname{tg}^2 x)$$

(2) Jiné řešení

$$\int tg^5 x\, dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\, dx = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x}\cdot(-\sin x)\, dx =$$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\, dx$

$$= -\int \frac{1-2y^2+y^4}{y^5}\, dy =$$

$$= -\int \frac{1}{y^5} - \frac{2}{y^3} + \frac{1}{y}\, dy \overset{c}{=} -\left(-\frac{1}{4y^4} + \frac{1}{y^2} + \ln|y|\right)$$

$$\overset{c}{=} \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x|$$

(2) $$\int \frac{\sin^5 x \cos x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{y^5}{(1-y^2)^3}\, dy = \ldots \text{ parciální zlomky}$$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\, dx$

$$= \int -\frac{1}{2}\frac{1}{1+y} + \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{(1+y)^3} - \frac{1/2}{(y-1)} - \frac{7/16}{(y-1)^2} - \frac{1/8}{(y-1)^3}\, dy$$

$$\overset{c}{=} -\frac{1}{2}\ln|1+y| + \frac{7}{16}\frac{-1}{1+y} + \frac{1}{16}\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{2}\ln|y-1| + \frac{7}{16}\cdot\frac{1}{y-1} + \frac{1/16}{(y-1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + \frac{-7/16}{1+\sin x} + \frac{1/16}{(1+\sin x)^2} - \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| + \frac{7/16}{\sin x - 1} + \frac{1/16}{(\sin x - 1)^2}$$

(3)

(396) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{2-\cos x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{2-\cos x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2-\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{3t^2+1}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

(4)

(398) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\cos^3 x}{2-\sin x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{2-t}\,dt = \int \left(2+t+\frac{3}{t-2}\right) dt =$$

$$= 2t + \frac{t^2}{2} + 3\ln|t-2| + C = 2\sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + 3\ln|\sin x - 2| + C.$$

5. $\displaystyle\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx$

Řešení:

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = (\operatorname{tg}^2 x + 1)\, dx = (t^2+1)\, dx \implies dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}\, dx = \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

který dále řešíme rozkladem na parciální zlomky. Ve zlomku

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)}$$

formálně pišme y místo t^2. Pak podle věty o rozkladu na parciální zlomky máme, že

$$\frac{3y+1}{(y+3)(y+1)} = \frac{A}{y+3} + \frac{B}{y+1}$$
$$3y+1 = A(y+1) + B(y+3)$$

a dosazením $y = -1$ dostaneme, že $B = -1$, dosazením $y = -3$ dostaneme, že $A = 4$. Platí tedy, že

$$\frac{3t^2+1}{(t^2+3)(t^2+1)} = \frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}$$

Nyní dokončíme integraci

$$= \int \frac{3t^2+1}{t^2+3}\frac{1}{t^2+1}\, dt = \int \left(\frac{4}{t^2+3} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt \overset{C}{=} \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctan} \frac{t}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctan} t$$
$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctan} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \cancel{- x} - \operatorname{arctan}(\tan x)$$

6. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\, dx$

Řešení: Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Pak platí, že

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1}{2} = \frac{t^2+1}{2} \implies dx = \frac{2\, dt}{t^2+1}$$

a dále platí

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{t^2+1}$$

Dostáváme tak, že

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{2t}{t^2+1}}\cdot\frac{2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{4t}{(t^2+1)(t^2+2t+1)}\,dt$$
$$= \int \frac{4t}{(t^2+1(t+1)^2}\,dt =$$

a nyní postupujeme rozkladem na parciální zlomky, který hledáme ve tvaru

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}$$

Odkud přenásobením vyplývá

$$4t = A(t+1)(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)(t+1)^2$$

Dosazením $t=-1$ dostaneme, že $B=-2$. Dosazením $t=i$ dostaneme

$$4i = (Ci+D)(1+i)^2 = (Ci+D)\cdot 2i$$
$$2 = Ci + D$$

odkud plyne, že $C=0$ a $D=2$. Zpětným dosazením dostaneme

$$4t = A(t+1)(t^2+1) - 2(t^2+1) + 2(t+1)^2$$

a porovnáním absolutním členů vidíme, že $0 = A-2+2$, tedy, že $A=0$. Hledaný rozklad má tedy tvar

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{t^2+1}$$

Dokončeme integraci.

$$= \int \frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2} = -\int \frac{2}{(t+1)^2}\,dt + \int \frac{2}{t^2+1}\,dt \overset{C}{=} \frac{2}{t+1} + 2\arctan t = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + x$$

(7)

(390) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx.$$

Řešení:

$$\int \cos^5 x \cdot \sin^4 x \, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^2 \cos x \cdot \sin^4 x \, dx \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right| =$$
$$= \int \left(1 - t^2\right)^2 t^4 \, dt = \int \left(t^4 - 2t^6 + t^8\right) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$
$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2 \sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\,dx$

Řešení: Protože $f(\sin x, \cos x) = f(-\sin x, -\cos x)$, použijeme substituci $t = \text{tg } x$. Protože

$$\frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \frac{dx}{\cos^2 x} \frac{1}{\text{tg } x} \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{dt}{t}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2+1}{t^3}\,dt$$

dostáváme

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{t^2+1}{t^3}\,dt \stackrel{C}{=} \ln|t| - \frac{1}{2}t^2 = \ln|\text{tg } x| - \frac{1}{2\text{tg }^2 x}$$

Podotkněme, že platí

$$\frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} \stackrel{C}{=} \frac{\cos^2 x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}$$

(8) Jiné řešení

$$\int \frac{1}{\cos x \sin^3 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x \sin^3 x}\,dx = \int \frac{1}{(1-y^2)y^3}\,dy = \dots = \int \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y} + \frac{-1/2}{y+1}$$

$y = \sin x$

$dy = \cos x\,dx$

$$\frac{-1/2}{y-1}\,dy$$

$$\overset{c}{=} -\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| + \ln|y| = -\frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln|\cos^2 x| + \ln|\sin x|$$

(8) nebo

$$\int \frac{\sin x}{\cos x \sin^4 x}\,dx = -\int \frac{1}{y(1-y^2)^2}\,dy =$$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\,dx$

$$= \int -1/y + \frac{1/2}{y+1} + \frac{1/4}{(1+y)^2} + \frac{1/2}{y-1} + \frac{-1/4}{(y-1)^2} \overset{c}{=}$$

$$\overset{c}{=} -\ln|y| + 1/2\ln|1-y^2| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2-1}$$

$$= -\ln|\cos x| + 1/2\ln|\sin^2 x| + 1/2\,\frac{1}{\cos^2 x - 1}$$

(a)

(400) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2+2t^2-2t}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{t^2-t+1}{(1+t^2)(t^2+3)}\,dt = 2\int \frac{2+t}{t^2+3}\,dt - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + 4\int \frac{dt}{t^2+3} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2t}{t^2+3}\,dt + \frac{4}{3}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - 2\int \frac{t}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \ln\left|t^2+3\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln\left|1+t^2\right| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\right| - \ln\left|\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right| + \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

(10)

(392) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+4\cos^2 x+3\sin^2 x}\,dx \left| \begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{matrix} \right| = \int \frac{t^2-1}{1+4t^2+3-3t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{t^2+4-5}{t^2+4}\,dt = \int \left(1-5\frac{1}{t^2+4}\right) dt = t-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C =$$
$$= \cos x-\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos x}{2}+C.$$

(11) (393) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$$

Řešení:

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{1+2t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{1}{2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\right) + C.$$

(12)

(397) Pomocí vhodné substituce vypočtěte
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

<u>**Řešení:**</u>

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t|+C = -\ln|1+\cos x|+C.$$

(13)

(399) Pomocí vhodné substituce vypočtěte

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx.$$

Řešení:

$$\int \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - 1}\, dx \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\, dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t-1} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}\, dt = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} + \frac{1}{2} \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t-1| + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1}\, dt + \int \frac{dt}{t^2+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t-1| - \frac{1}{4} \ln \left| t^2 + 1 \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} x - 1| - \frac{1}{4} \ln \left| \operatorname{tg}^2 x + 1 \right| + \frac{x}{2} + C.$$