10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k* f *na* I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a α, $\beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Věta 4 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 5 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin\,(kx)$	$\arcsin\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos\,(kx)$	$\arccos\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan\,(kx)$	$\arctan\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arcctg}\,(kx)$	$\mathrm{arcctg}\,(kx)$	$P(x)$

Příklady

Najděte primitivní funkce k následujícím funkcím na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

1. Úvod

   (a) $\displaystyle\int x^{13} + \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   Řešení: Sledujte výpočet

$$\int x^{13} + \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int x^{13} + x^{1/2} + x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{14}}{14} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{1}{-2x^2} + c.$$

(b) $\int (1 + \sin x + \cos x)\, \mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (1 + \sin x + \cos x)\, dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

(c) $\int 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \int 7x^{2/3} + \frac{1}{2}\sin x - 2\frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = 7\frac{x^{5/3}}{5/3} - \frac{1}{2}\cos x - 2\arctan x + c$$

(d) $\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x}\, \mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x}\, \mathrm{d}x = \int x + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{3} + \frac{2}{3}\ln x + c$$

(e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right) dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C.$$

(f) $\int (3 - x^2)^3\, \mathrm{d}x$

Řešení: Zřejmě

$$\int (3 - x^2)^3\, dx = \int (27 - 9x^2 + 3x^4 - x^6)\, dx = 27x - 3x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{x^7}{7} + C.$$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax + b) + C\right)' = f(ax + b)$, pokud $a \neq 0$.

3. Lineární substituce

(a) $\int e^{-3x+1}\, \mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int e^{-3x+1}\, \mathrm{d}x = \frac{-1}{3}e^{-3x+1} + C$$

(b) $\int \sin(2x - \pi)\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \sin(2x - \pi)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x - \pi) + c$$

(c) $\int (2x+1)^7\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int (2x+1)^7\,\mathrm{d}x = \frac{(2x+1)^8}{16} + c$$

(d) $\int \frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 2x + \frac{\pi}{4}$ dostaneme

$$\int \frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}\,dx \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\text{cotg}\,\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

(e) $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,\mathrm{d}x$

Řešení: Pomocí lineární substituce $y = 5x$ dostaneme

$$\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x - x\sin 5\alpha,$$

neboť $\sin 5\alpha$ je konstantní funkce (nezávislá na proměnné x).

(f) $\int \frac{1}{x+A}\,\mathrm{d}x, \quad A \in \mathbb{R}$

Řešení: Víme, že primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ je $\ln|x| + C$. Podle příkladu 2. o lineární substituci tedy primitivní funkce k funkci $\frac{1}{ax+b}$ je $\frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$. Odtud vyplývá, že (položte $a = 1$, $b = A$)

$$\int \frac{1}{x+A}\,dx = \ln|x+A| + C.$$

4. Substituce

(a) $\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x.$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Pak $dy = \cos x\,dx$ a platí

$$\int \sin^5 x \cos x\,dx = \int y^5\,dy \overset{C}{=} \frac{y^6}{6} = \frac{\sin^6 x}{6}$$

(b) $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = -x^2$. Potom $dy = -2x\,dx$ a platí

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int e^y\,dy \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}e^y = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

(c) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = 1 + x^2$. Potom $dy = 2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

(d) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arcsin x$, potom $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{dy}{y^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\arcsin x}$$

(e) $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 1 - \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

5. Per partes

(a) $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = e^{-x}$, $u = -e^{-x}$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int xe^{-x}\,dx = \left[-xe^{-x}\right] - \int -e^{-x}\,dx \stackrel{C}{=} -xe^{-x} - e^{-x}$$

(b) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \cos x$, $u = \sin x$, $v = x$, $v' = 1$.

$$\int x\cos x\,dx = [x\sin x] - \int \sin x\,dx \stackrel{C}{=} x\sin x + \cos x$$

(c) $e^x \sin x \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \ \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$2 \int e^x \sin x \ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x$$

tedy

$$\int e^x \sin x \ \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \sin x)$$

(d) $\displaystyle\int \arctan \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = 1$, $u = x + 1$ (výhodnější než x), $v = \arctan \sqrt{x}$, $v' = \frac{1}{1+x} \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\int \arctan \sqrt{x} \, dx = \big[(x+1)\arctan \sqrt{x}\big] - \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \stackrel{C}{=} (x+1)\arctan \sqrt{x} - \sqrt{x}$$

6. Směs

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \frac{1}{x}$. Potom $dy = -\frac{1}{x^2} \, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx = -\int \sin y \, dy \stackrel{C}{=} \cos y = \cos \frac{1}{x}$$

(b) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Položme $u' = 1$, $v = \ln x$. Potom $u = \int 1 \, dx = x$ a $v' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ a použitím vztahu pro integraci per partes dostáváme

$$\int \ln x \, dx = [x \ln x] - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \stackrel{C}{=} x \ln x - x$$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2 + e^x} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = e^x$. Potom $dy = e^x \, dx$ a platí

$$\int \frac{e^x}{2 + e^x} \, dx = \int \frac{dy}{2 + y} \stackrel{C}{=} \ln |2 + y| = \ln(2 + e^x)$$

(d) $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \ln(\ln x)$. Potom $dy = \frac{1}{x \ln x}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy \overset{C}{=} \ln|y| = \ln(|\ln(\ln x)|)$$

(e) $\int x^3 e^{-x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Provedeme substituci $y = x^2$. Pak $dy = 2x\, dx$ a platí

$$\int x^3 e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int y e^{-y} \, dy =$$

Nyní aplikujeme per partes: $u' = e^{-y}$, $u = -e^{-y}$, $v = y$, $v' = 1$.

$$= \left[-ye^{-y}\right] + \int e^{-y} \, dy \overset{C}{=} -ye^{-y} - e^{-y} = -x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}$$

(f) $\int \mathrm{tg}\; x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x\, dx$ a platí

$$\int \mathrm{tg}\; x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{dy}{y} \overset{C}{=} -\ln|y| = -\ln|\cos x|$$

(g) $\int \mathrm{arcsin}\; x \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Per partes: $u' = 1$, $u = x$, $v = \mathrm{arcsin}\; x$, $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int 1 \cdot \mathrm{arcsin}\; x \, dx = [x\mathrm{arcsin}\; x] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$.

$$= x\mathrm{arcsin}\; x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy \overset{C}{=} x\mathrm{arcsin}\; x + \sqrt{y} = x\mathrm{arcsin}\; x + \sqrt{1-x^2}$$

(h) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sqrt{x}$. Potom $y^2 = x$, $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \frac{1}{1+x} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{1}{1+y^2} \, dy \overset{C}{=} 2\mathrm{arctan}\; y = 2\mathrm{arctan}\; \sqrt{x}$$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Vztah upravíme a použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x\,dx$

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{dy}{1+y^2} \overset{C}{=} \arctan y = \arctan e^x$$

(j) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Pro $a = b = 0$ je $\int e^{0x}\cos(0x)\ \mathrm{d}x = \int 1\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} x$.

Nyní předpokládejme, že $a \neq 0$, $b \neq 0$. Použijeme nadvakrát integraci per partes, exponencielu budeme derivovat a goniometrickou funkci integrovat. Platí

$$\int e^{ax}\cos bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\ \mathrm{d}x.$$

Odtud vyplývá, že

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

$$\int e^{ax}\cos bx\ \mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)$$

Lehko se ověří, že výsledek platí i pro $b = 0$, pokud $a \neq 0$, a také pro $a = 0$, pokud $b \neq 0$.

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

Použijeme substituci $y = \cos x$. Potom $dy = -\sin x\,dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx = -\int \frac{dy}{1-y^2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

(l) $\displaystyle\int \frac{x}{3-2x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = 3-2x^2$. Potom $dy = -4x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{3-2x^2}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dy}{y} \overset{C}{=} -\frac{1}{4}\ln|y| = -\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|$$

(m) $\int \cos^3 x \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \sin x$. Potom $dy = \cos x\, dx$ a platí

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1-\sin^2 x)\cos x\, dx = \int (1-y^2)\, dy \overset{C}{=} y - \frac{y^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$$

(n) $\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}} \,\mathrm{d}x$

Řešení:

Použijeme substituci $y = \operatorname{cotg} x$. Potom $dy = -\frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ a platí

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{cotg} x}}\, dx = -\int \frac{dy}{y^{1/4}} \overset{C}{=} \frac{4}{3} y^{3/4} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{cotg}^3 x}$$

(o) $\int \cos(\ln x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme integraci per partes, položme $v' = 1$, $u = \cos(\ln x)$. Potom $v = x$ a $u' = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$. Dostaneme, že

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx =$$

Nyní použijeme ještě jednou per partes na $v' = 1$ a $u = \sin(\ln x)$ a dostaneme

$$\int 1 \cdot \cos(\ln x) = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)$$

Převedením integrálu napravo na levou stranu dostaneme, že

$$2\int 1 \cdot \cos(\ln x) \overset{C}{=} x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$$

$$\int \cos(\ln x) \overset{C}{=} \frac{1}{2} x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$$

(p) $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = \sin x$, $u = -\cos x$, $v = \ln(\operatorname{tg} x)$, $v' = \frac{1}{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$.

$$\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx = -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{1}{\sin x}\, dx \overset{C}{=} -\cos x \ln(\operatorname{tg} x) + \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$$

(q) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \arctan x$, potom $dy = \frac{1}{1+x^2}\, dx$ a platí

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \int y\, dy \overset{C}{=} \frac{y^2}{2} = \frac{\arctan^2 x}{2}$$

(r) $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = x^2$. Potom $dy = 2x\,dx$ a platí

$$\int \frac{x}{4+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dy}{1+(y/2)^2} \overset{C}{=} \frac{1}{4}\text{arctan}\,\frac{y}{2} = \frac{1}{4}\text{arctan}\,\frac{x^2}{2}$$

(s) $\displaystyle\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u' = x^2$, $u = \frac{x^3}{3}$, $v = \arccos x$, $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int x^2 \arccos x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\arccos x\right] + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

Substituce $y = 1 - x^2$, odkud plyne $dy = -2x\,dx$ a $x^2 = 1 - y$.

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{6}\int \frac{y-1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{6}\int \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{9}y^{3/2} - \frac{1}{3}y^{1/2} = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{9}(1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{1/2}$$

(t) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y = \cos x$. Pak $dy = -\sin x\,dx$ a platí

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = -\int \frac{dy}{\sqrt{y^3}} \overset{C}{=} 2y^{-1/2} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}}$$

(u) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení: První per partes: $u' = \sqrt{x}$, $u = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $v = \ln^2 x$, $v' = 2\ln x\frac{1}{x}$.

$$\int \sqrt{x}\ln^2 x\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x\right] - \int \frac{2}{3}x^{1/2}\ln x\,dx =$$

Druhé per partes: $u' = \frac{2}{3}x^{1/2}$, $u = \frac{4}{9}x^{3/2}$, $v = \ln x$, $v' = 1/x$.

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x\right] - \left[\frac{4}{9}x^{3/2}\ln x\right] + \int \frac{4}{9}x^{1/2}\,dx \overset{C}{=} \frac{2}{3}x^{3/2}\ln^2 x - \frac{4}{9}x^{3/2}\ln x + \frac{8}{27}x^{3/2}$$

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Nejprve použijeme substituci $y = e^x$, $dy = e^x\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{dy}{y\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y}{2y^2\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y$$

Použijeme substituci $1+y^2=z$, $2y\mathrm{d}y=\mathrm{d}z$. Dostaneme

$$=\int \frac{1}{2(z-1)\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$$

Substituce $t=\sqrt{z}$, $\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$. Máme

$$=\int \frac{1}{(t^2-1)}\mathrm{d}t.$$

To už je v tabulce primitivních funkcí, tedy:

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+c=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{1-\sqrt{y^2+1}}+c=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{e^{2x}+1}}{1-\sqrt{e^{2x}+1}}+c$$

(w) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Použijeme substituci $y=\ln x$. Pak $dy=\frac{1}{x}\,dx$ a platí

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\int y^2\,dy \stackrel{C}{=} \frac{y^3}{3}=\frac{\ln^3 x}{3}$$

(x) $\displaystyle\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

První per partes: $u'=\sin 2x$, $u=-\frac{1}{2}\cos 2x$, $v=x^2$, $v'=2x$.

$$\int x^2\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}x^2\cos 2x\right]+\int x\cos 2x=$$

Druhé per partes: $u'=\cos 2x$, $u=\frac{1}{2}\sin 2x$, $v=x$, $v'=1$.

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x$$

(y) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Per partes: $u'=\frac{1}{x^2}$, $u=-\frac{1}{x}$, $v=\arcsin x$, $v'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\arcsin x\right]+\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$$

Substituce $y=\sqrt{1-x^2}$. Potom $dy=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ a $x^2=1-y^2$.

$$=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int \frac{1}{1-y^2}\,dy \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}=-\frac{1}{x}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

Další příklady k procvičení

7. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

(a) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} + \frac{4}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} + \frac{4}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} + \frac{4}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = e^x - x - 4\cot x + c$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-(3x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $y = 3x-1$, pak $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-(3x-1)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{4-y^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2} + c =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right) + c$$

(c) $\int (1-\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$

Řešení:

$$\int (1-\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \int 1 - 2\sqrt{x} + x\,\mathrm{d}x = x - 2\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2} + c$$

(d) $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Substituce $y = \sin x$, $\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x$, pak

$$\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \int y\,\mathrm{d}y = \frac{y^2}{2} + c = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

(e) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení:

Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\,dx = x - \arctan x + C.$$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+4}{x^2-1}\,dx = \int \left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx = \int \left(1-\frac{4}{1-x^2}\right)dx = x - 2\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Výraz převedeme na tvar $\frac{1}{1+c^2x^2}$ a poté užijeme substituci $y = cx$.

$$\int \frac{1}{2+3x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}\,dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{6}}\operatorname{arctan}\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Protože je

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = 2\sqrt{y},$$

platí

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,dx \stackrel{C}{=} \frac{1}{-5}\cdot 2\sqrt{2-5x} = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}$$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \operatorname{cotg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx = -\operatorname{cotg} x - x + C.$$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

(k) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet.

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x}-1\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

(l) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right),\ a\in\mathbb{R}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)\,dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$$

(m) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x^{3/2}}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)x^{3/4}\,dx = \int \left(x^{3/4}-x^{-2+3/4}\right)$$

$$= \int \left(x^{3/4}-x^{-5/4}\right)\,dx = \frac{x^{7/4}}{7/4} - \frac{x^{-1/4}}{-1/4} = \frac{4}{7}x^{7/4} + 4x^{-1/4} + C.$$

(n) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\,dx = \arcsin$$

(o) $\displaystyle\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$

Řešení: Sledujte výpočet

$$\int (2^x+3^x)^2\,dx = \int (4^x + 2\cdot 6^x + 9^x)\,dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2\cdot 6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

(p) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Je

$$\int \sqrt[3]{y}\,dy = \frac{y^{4/3}}{4/3} + C.$$

Podle příkladu 2 o lineární substituci je

$$\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{4/3}}{4/3} + C = -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(1-3x)^4} + C.$$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,\mathrm{d}x$

Řešení: Analogicky jako v předchozím příkladu

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}} \overset{C}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x = \sqrt{\frac{1}{3}}\arcsin\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

8. Najděte takovou funkci, aby $f'(x) = 6x(1-x)$ a $f(0) = 1$.

9. Najděte chyby

   (a) $\displaystyle\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 e^x + c$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = x \int \frac{1}{1-x^2} \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + c$