10. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/∼kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť funkce f je definována na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce k f na I*, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2 (Rovnost až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 3 (Linearita neurčitého integrálu)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Věta 4 (první věta o substituci)**.** Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na intervalu (α, β) s hodnotami v (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t \overset{C}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Věta 5 (Integrace per partes)**.** Nechť I je neprázdný otevřený interval a funkce f je spojitá na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\mathrm{d}x \text{ na } I.$$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot e^{kx}$	$P(x)$	e^{kx}
$P(x) \cdot a^{kx}$	$P(x)$	a^{kx}
$P(x) \cdot \sin(kx)$	$P(x)$	$\sin(kx)$
$P(x) \cdot \cos(kx)$	$P(x)$	$\cos(kx)$

	u(x)	v'(x)
$P(x) \cdot \ln^n x$	$\ln^n x$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arcsin\,(kx)$	$\arcsin\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arccos\,(kx)$	$\arccos\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \arctan\,(kx)$	$\arctan\,(kx)$	$P(x)$
$P(x) \cdot \mathrm{arcctg}\,(kx)$	$\mathrm{arcctg}\,(kx)$	$P(x)$

Hinty

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \qquad\qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Příklady

Najděte primitivní funkce k následujícím funkcím na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

1. Úvod

   (a) $\displaystyle\int x^{13} + \sqrt{x} + \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int (1 + \sin x + \cos x)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int 7\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 4x + 2}{3x}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int (3 - x^2)^3\,\mathrm{d}x$

2. Dokažte, že pokud $F'(x) = f(x)$, potom $\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = f(ax+b)$, pokud $a \neq 0$.

3. Lineární substituce

   (a) $\displaystyle\int e^{-3x+1}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int \sin(2x - \pi)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int (2x+1)^7\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int (\sin 5x - \sin 5\alpha)\,\mathrm{d}x$

   (f) $\displaystyle\int \frac{1}{x+A}\,\mathrm{d}x, \quad A \in \mathbb{R}$

4. Substituce

   (a) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x.$

   (b) $\displaystyle\int x e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

5. Per partes

(a) $\int xe^{-x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

(c) $e^x \sin x\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

6. Směs

(a) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \ln x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \frac{e^x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x$

(e) $\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\int \mathrm{tg}\ x\,\mathrm{d}x$

(g) $\int \arcsin\ x\,\mathrm{d}x$

(h) $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$

(j) $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

(k) $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$

(l) $\int \frac{x}{3-2x^2}\,\mathrm{d}x$

(m) $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$

(n) $\int \frac{1}{\sin^2 x\sqrt[4]{\mathrm{cotg}\ x}}\,\mathrm{d}x$

(o) $\int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$

(p) $\int \sin x\ln(\mathrm{tg}\ x)\,\mathrm{d}x$

(q) $\int \frac{\arctan\ x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(r) $\int \frac{x}{4+x^4}\,\mathrm{d}x$

(s) $\int x^2 \arccos\ x\,\mathrm{d}x$

(t) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$

(u) $\int \sqrt{x}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$

(w) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

(x) $\int x^2\sin 2x\,\mathrm{d}x$

(y) $\int \frac{\arcsin\ x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení

7. Najděte primitivní funkce F k následujícím funkcím f na maximální možné podmnožině reálných čísel a tuto množinu určete.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} + \frac{4}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-(3x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int (1-\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{2+3x^2}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right),\ a\in\mathbb{R}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,\mathrm{d}x$

8. Najděte takovou funkci, aby $f'(x)=6x(1-x)$ a $f(0)=1$.

9. Najděte chyby

(a) $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3e^x + c$

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = x\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + c$

10. Který z následujících integrálů lze převést substitucí na tvar $\int y^n$, $n\in\mathbb{Z}$?

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int x^2(x^3+3)^6\,\mathrm{d}x$