VZOR

(1) NP

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \qquad a_n \geq 0$$

$$\lim a_n = 1/2 \neq 0$$

(2) LSK

$$\sum_{n=1} \frac{n^2+n-1}{2n^3-n^2} \qquad a_n \geq 0$$

LSK s $b_n = \frac{1}{n}$ $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n-1}{2n^3-n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^3+n^2-1}{2n^3-n^2} = 1/2$$

neb $\sum \frac{1}{n}$ Div $\Rightarrow$ $\sum a_n$ Div.

(3) Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n \qquad a_n \geq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n} = \lim \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1 \quad \Rightarrow \sum \text{konv.}$$

(5) Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

$$c_{n+1} \leq c_n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+2} \checkmark$$

z Leibn. $\sum$ K

(6) $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{1/n^2} = 1$$

Heine $x_n = 1/n^2$

$\sum \frac{1}{n^2}$ K $\Rightarrow$ $\sum a_n$ K

9. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad - nutná podmínka konvergence

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ **Řešení:**
   Řada nekonverguje, neboť
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$
   Řešení: Platí, že
   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{1-(2/3)^n}{1+(2/3)^n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1-0}{1+0} = 1.$$
   Řada diverguje, neboť její koeficienty nesplňují nutnou podmínku pro konvergenci: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Vyšetřete konvergenci následujících řad - limitní srovnávací kritérium

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$
   Řešení: Použijeme limitní srovnávací kritérium a srovnání s řadou $\sum \frac{1}{n}$. Protože
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$
   řada diverguje.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$
   Řešení: Nejprve výraz upravíme:
   $$\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1} = \frac{n^2+5-n^2-1}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}$$
   $$= \frac{4}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2} + \sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}$$

Budeme srovnávat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{4/3}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt[3]{(n^2+5)^2}+\sqrt[3]{(n^2+5)(n^2+1)}+\sqrt[3]{(n^2+1)^2}}}{\frac{4}{n^{4/3}}} = \frac{1}{3}.$$

Neboť řada$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^{4/3}}$ konverguje, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$

Řešení: Srovnáme s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}}{\frac{n\sqrt{n}}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\sqrt{n}}{n^3}}{\frac{n\sqrt{n}}{n^3}} \cdot \frac{1+2n^{-1/2}}{2+1/n} = \frac{1}{2}.$$

Neboť $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konverguje, konverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$.

3. Vyšetřete konvergenci následujících řad - Cauchyho kritérium

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}} &= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2-1} \\ &\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{e}\cdot 1 < 1,\end{aligned}$$

tedy řada konverguje.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{4^n+9^n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

4. Vyšetřete konvergenci následujících řad - d'Alambertovo kritérium

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}\frac{1}{5} = 4\cdot\frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

Řešení: Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{22^n}\frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$, tedy řada konverguje.

5. Vyšetřete konvergenci následujících řad - Leibnizovo kritérium

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$

Řešení: Řada konverguje podle srovnávacího kritéria, neboť

$$\frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3} = \frac{n\sqrt{n}}{n^3}\cdot\frac{1+2n^{-1/2}}{2+1/n} \leq \frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{1+2}{2+0} = \frac{3}{2}\frac{1}{n^{3/2}}.$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$

Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln n}$ je zjevně nerostoucí.

6a

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$
(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^{4/3}}$. Čtenáři je tak v této chvíli dána možnost přijít na to, proč zrovna tato mocnina n je ta pravá... Pokud se necháte poddat, tak vězte, že pro velká n se
$$\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \quad \text{„chová jako"} \quad \frac{1}{n},$$
zatímco (stále pro velká n) se
$$\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{„chová jako"} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \tag{2}$$
Nyní je potřeba tyto naše odhady matematicky přesně odůvodnit. Počítejme tedy, a nezapomeňme ani na odůvodnění výpočtu:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}}_{=:A_n} \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{=:B_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$
Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dostali jsme $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{2\sqrt{2}}$. Použili jsme větu o aritmetice limit, Heineovu větu a spojitost odmocniny. Pro posloupnost B_n platí (průběh a výsledek tohoto výpočtu je přesně to, co stojí za „odhadem" v (2)):
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$
Rovnost v $(\star)$ plyne ze základní limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a Heineovy věty použité na posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$, která sestává z nenulových členů a konverguje k 0. Tím je odůvodněn výpočet (3).

Protože limita v (3) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:
- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 body
- číselný výpočet limity v (3) .... 6 bodů
- závěr, že řada konverguje .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:
- uvedení, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- Heineho věta .... 1 bod
- limita složené funkce .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

(6b) $\sum \arcsin\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\cdot\sqrt{\sin\frac{1}{n}} = \sum \underset{\geq 0}{a_n}$

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1} = \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

LSK S $\quad b_n = \frac{2}{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}}{(1)\ \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{n}{2}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{(2)\ \sqrt{\frac{1}{n}}} \overset{\text{VOAL}}{=} 1\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(1) Heine $\quad x_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \quad x_n \to 0,\ x_n \neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\arcsin y}{y} = 1$$

(2) Heine $\quad x_n = \frac{1}{n},\ x_n\to 0,\ x_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$

$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{\sin y}}{\sqrt{y}} = 1$ $\quad$ neboť $\quad f(z)=\sqrt{z}\quad \lim_{z\to 1} f(z) = 1$

$g(y) = \frac{\sin y}{y},\ \lim_{y\to 0} g(y) = 1$

VOLSF

spojitost $f(z)$

Závěr: $\quad \sum b_n$ K, tedy i $\underline{\underline{\sum a_n}}$ K

6c $\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right)}_{a_n}$

Hypotéza

$$\frac{n^2+4}{n(n-1)} \geq 1$$

$$\cancel{n^2}+4 \geq \cancel{n^2}-n \quad \rightarrow \quad a_n \geq 0 \quad \text{pro } n \in \{2,3,\dots\}$$

$$n \geq -4$$

LSK s $b_n = \frac{n^2+4}{n(n-1)} - 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \underset{\text{Heine}}{\overset{\uparrow}{=}} 1$$

$$x_n = \frac{n^2+4}{n^2-n} \qquad x_n \to 1 \qquad \lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$$

$$x_n \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tedy $\sum a_n$ K $\iff \sum \frac{n^2+4}{n^2-n} - 1$ K

$$\sum \frac{\cancel{n^2}+4-\cancel{n^2}+n}{n^2-n} = \sum \underbrace{\frac{n+4}{n^2-n}}_{b_n}$$

srovnáním s $c_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{4}{n}}{1-\frac{1}{n}} \overset{VOAL}{=} 1$$

$$\sum c_n \text{ D} \Rightarrow \sum b_n \text{ D} \Rightarrow \underline{\underline{\sum a_n \text{ D}}}$$

1 a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n} - n \right) \cdot \arctan\left(n^3 - 5n + 6\right)$$

$$=: a_n$$

$$\sqrt[3]{n^3+n} - n = \frac{\cancel{n^3} + n - n^3}{\sqrt[3]{n^3+n}^{\,2} + n\sqrt[3]{n^3+n} + n^2} \approx \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

LSK s $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}^{\,2} + n\sqrt[3]{n^3+n} + n^2} \arctan\left(n^3 - 5n + 6\right)}{\dfrac{1}{n}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} \in (0, \infty)$$

$\arctan(n^3-5n+6) \nearrow \pi/2$

Neb $\sum \frac{1}{n}$ div $\overset{LSK}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ Div.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n \qquad z \in \mathbb{R}$

d'Al pro $z \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}+1} \cdot z^{n+1} \right|}{\left| \frac{2^n}{2^n+1} z^n \right|} = \lim_{n\to\infty} |z| \cdot \frac{2 \cdot 2^n}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{1}{1+\frac{1}{2^{n+1}}} = |z|$$

Tedy pro $|z| < 1 \quad z \neq 0 \qquad \sum AK \quad$ z d'Al

$z = 0 \qquad \sum AK \quad$ automaticky

$|z| > 1 \qquad \sum D$

$z = 1 \quad \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n+1}$ diverguje, neb nesplňuje NP.

$z = -1 \quad \to \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{2^n+1}$ diverguje, — " —

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} \right)^{n^{3/2}}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right)^{x^{3/2}} = \lim_{x\to\infty} e^{x^{3/2} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right)} \text{"} = e^{\infty}\text{"} = \infty \neq 0$$

(1) VOLSF $\qquad \Rightarrow$ Div z NP

$\boxed{\text{Heine}}$

$x_n = n$
$x_n \to \infty$
$x_n \neq \infty \ \forall n$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{x} \cdot \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right)}{\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - 1} \cdot \left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} - 1 \right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \cdot \underbrace{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underset{\to\infty}{x} \overset{\text{VoAL}}{=} \infty$$

↓ (2) VOLSF

(1) $f(y) = e^y \qquad \lim_{y\to\infty} f(y) = \infty$

$g(x) = x^{3/2} \ln\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right) \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \qquad$ (P)

(2) $f(y) = \frac{\ln y}{y-1} \qquad \lim_{y\to 1} f(y) = 1$

$g(x) = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \qquad$ (P)

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) =: \sum a_n$

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\arcsin \frac{1}{n} \approx \frac{1}{n}$$

$\Big\}$ srovnáme s $\frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \arcsin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = 1 \cdot \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$

$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ k $\Rightarrow$ ZLSK $\sum a_n$ také konv.

(e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n} - \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^8+3n} - \sqrt{n^8+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+n} - \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt{n^8+3n} - \sqrt{n^8+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^8+3n} + \sqrt{n^8+1}}{\sqrt{n^8+3n} + \sqrt{n^8+1}} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n^4+n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^4+n} \cdot \sqrt[3]{n^4+1} + \left(\sqrt[3]{n^4+1}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n^4+n}\right)^2 + \sqrt[3]{n^4+n}\,\sqrt[3]{n^4+1} + \left(\sqrt[3]{n^4+1}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\cancel{n^4}+n-\cancel{n^4}-n}{\cancel{n^8}+3n-\cancel{n^8}-1}}_{\to 1/3} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n^8+3n} + \sqrt{n^8+1}}{\left(\sqrt[3]{n^4+n}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{n^4+n}\,\sqrt[3]{n^4+1}\right) + \left(\sqrt[3]{n^4+1}\right)^2}}_{\to \infty} = \infty$$

chová se jako $\dfrac{n^{8/2}}{n^{8/3}} \to \infty$

tedy $\sum$ div z NP

(f) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)} \right)$

(a) $\sin \frac{1}{n^2} \approx \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n^2}{1/n^2} = 1 \in (0,\infty)$ $\quad \sum \frac{1}{n^2}$ konv. , z LSS $\sum \sin \frac{1}{n^2}$ k

Heine

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)} = 0$, zjevně klesající

$\ln(\ln n) \to \infty$

VOLSF + Heine

z Leibnize $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ k

Závěr: z linearity $\sum$ konvergují

g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}$

d' Al

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}\right|}{\left|(-1)^n \frac{n^{100}}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{100}}_{\downarrow\ 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

tedy řada AK

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \left(\sqrt[n]{e}-1\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}\right)}_{=:a_n}$

- $\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1} = \dfrac{n^2+4-n^2-1}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}} \approx \dfrac{1}{n}$

- $\left(\sqrt[n]{e}-1\right) = \left(e^{1/n}-1\right) \approx \frac{1}{n}$ (známá limita)

Vyšetříme A. konvergenci LSK s $\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|(-1)^n \left(\sqrt[n]{e}-1\right) \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}\right|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{3n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

Heine, známé lim

$$= 1 \cdot \frac{3}{2} \in (0,\infty)$$

tedy $\sum a_n$ AK $\iff \sum \frac{1}{n^2}$ AK $\to$ ale ta konverguje

Závěr: $\sum a_n$ AK

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}$

Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{(n^2)}}{(n+1)^{n^2+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n^2/n}}{(n+1)^{(n^2+1)/n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1/n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n)^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{1/n}} \overset{\text{wtf}}{=} \frac{1}{e} \cdot 1 < 1$$

$\downarrow$

konvergujo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\to e}} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}}_{\downarrow\, 1} \le \qquad \le \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

2 policajti

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}$

d'Ae

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}}{\dfrac{\ln(2^{2^n}+1)}{\ln(2^{4^n}+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^{2^{n+1}}+1)}{\ln(2^{2^n}+1)} \cdot \frac{\ln(2^{4^n}+1)}{\ln(2^{4^{n+1}}+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^{2^{n+1}}\left(\frac{1}{2^{2^{n+1}}}+1\right)\right)}{\ln\left(2^{2^n}\left(\frac{1}{2^{2^n}}+1\right)\right)} \cdot \frac{\ln\left(2^{4^n}\left(\frac{1}{2^{4^n}}+1\right)\right)}{\ln\left(2^{4^{n+1}}\left(\frac{1}{2^{4^{n+1}}}+1\right)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)} \cdot \frac{4^n \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^{n+1} \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln 2 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right)}{2^n}}_{\to 0}}{\ln 2 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)}{2^n}}_{\to 0}} \cdot \frac{\ln 2 + \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^n}}\right)}{4^n}}_{\to 0}}{4\ln 2 \quad \underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2^{4^{n+1}}}\right)}{4^n}}_{\to 0}}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} \frac{2\ln 2 + 0}{\ln 2 + 0} \cdot \frac{\ln 2 + 0}{4\ln 2 + 0} = \frac{1}{2} < 1$$

Σ konvergnje