8,

1.3 Determinanty a inverzní matice

Determinant — reálné číslo, které můžeme k dané čtvercové matici jednoznačně určit následujícím způsobem:

1. pro matici $A = (a_{11})$ typu 1×1 je $det(A) = a_{11}$,

2. pro matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ typu 2×2 je $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

3. pro matici A typu 3×3 je $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$.

V tomto případě první dva řádky matice napíšeme pod danou matici typu 3×3 a počítáme součiny zleva shora dolu po diagonále s plusem a zprava shora po opačné diagonále s mínusem.

4. pro obecnou čtvercovou matici A typu $m \times m$ determinant počítáme rozvojem podle řádku (sloupce)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{k1}(-1)^{k+1}M_{k1} + a_{k2}(-1)^{k+2}M_{k2} + \cdots + a_{km}(-1)^{k+m}M_{km}$$

kde M_{kj} označuje determinant submatice typu $(m-1) \times (m-1)$, která vznikne z původní matice vynecháním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Regulární matice — čtvercová matice, která má nenulový determinant.

Inverzní matice k matici A — matice $\mathbf{B}$, pro kterou platí, že $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.
Značíme $\mathbf{A}^{-1}$.

Poznámka. Pokud $\mathbf{A}$ není regulární, neexistuje k ní inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$.

Při hledání inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ postupujeme tak, že nejdříve k matici $\mathbf{A}$ typu $m \times m$ připíšeme jednotkovou matici stejného typu. Dostaneme novou matici typu $m \times 2m$, kterou pomocí elementárních transformací upravujeme tak dlouho, dokud nevznikne jednotková matice vlevo. Potom z pravé části jednoduše opíšeme matici $\mathbf{A}^{-1}$. Postup ilustruje následující schéma:

$$(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{E}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E} \,|\, \mathbf{A}^{-1})$$

1 **Příklad 1.3.1.** *Vypočítejte determinanty následujících matic typu 2×2:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$

Řešení: a) $det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) = 3 - 2 = \underline{\underline{1.}}$

b) $det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a \cdot a - b \cdot (-b) = \underline{\underline{a^2 + b^2.}}$

c) $det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = \underline{\underline{-1.}}$

2 **Příklad 1.3.2.** *Vypočítejte determinanty následujících matic typu 3×3:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení: a) $det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$
$$\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{matrix}$$

$= \Big(1 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2\Big) - \Big((-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-1)\Big) = \Big(2 + 1 + 12\Big) - \Big(4 + 2 + 3\Big) = 15 - 9 = \underline{\underline{6.}}$

b) $det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \Big(1 \cdot b \cdot b + 1 \cdot a \cdot b + 1 \cdot a \cdot a\Big) - \Big(b \cdot b \cdot 1 + a \cdot a \cdot 1 + b \cdot a \cdot 1\Big) =$

$= b^2 + ab + a^2 - b^2 - a^2 - ab = \underline{\underline{0.}}$

Poznámka. Matice **B** má dva lineárně závislé řádky (první řádek je stejný jako třetí) a proto $det(\mathbf{B}) = 0$.

c) $det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 1 + 12 - (4 + 8 + 9) = 37 - 21 = \underline{\underline{16.}}$

3 **Příklad 1.3.3.** *Vypočítejte determinanty následujících matic typu 4×4:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}$

Řešení: a) Je to matice typu 4×4, proto determinant musíme počítat rozvojem. Vybereme si řádek nebo sloupec, kde je nejvíce nul. V tomto případě jednoznačně nejvhodnější bude třetí řádek, kde jsou až 3 nuly. Jediné nenulové

3 číslo v tomto řádku je 5, která je v třetím řádku a třetím sloupci.

$$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} == 0 + 0 + 5\,(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot \Big(-6 - 2 + 0 + 1 + 12 + 0 \Big) = 5 \cdot 5 = \underline{\underline{25.}}$$

b) V tomto případě nejvhodnější bude počítat rozvoj podle třetího sloupce.

$$det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{vmatrix} = a\,(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 +$$

$$+ b\,(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a \cdot 17 - b \cdot (-9) = \underline{\underline{17a + 9b.}}$$

c) Rozvineme determinant podle prvního sloupce.

$$det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \underline{\underline{ac - b^2.}}$$

Příklad 1.3.4. *Vypočítejte determinanty následujících matic :*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 10 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Řešení: a) 10; b) 1; c) a^3; d)-310; e) -19.

Příklad 1.3.5. *Vypočítejte inverzní matici k matici:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

(8) (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & +1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Kontrole $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

(c) $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Příklad 1.3.7. *Vypočítejte inverzní matici k matici:*

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: a) $det(\mathbf{A}) = 1 \Rightarrow$ existuje $\mathbf{A}^{-1}$. Matici $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{E})$ typu 3×6 začneme upravovat z levého horního rohu směrem dolu.

1. První řádek přičteme k druhému a třetí řádek vydělíme -1.

2. Druhý řádek vydělíme -1.

3. Pokračujeme z pravého dolního rohu matice **A** směrem nahoru. Dvojnásobek třetího řádku přičteme k druhému řádku.

4. Druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

b) $det(\mathbf{B}) = 0$ a proto $\underline{\underline{\text{neexistuje } \mathbf{B}^{-1}}}$.

c) $det(\mathbf{C}) = 4 \Rightarrow$ existuje $\mathbf{C}^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

10a

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \min\{x^2+y^2, 2-x^2-y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = xy + yz \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)

LS 1997-98

106

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M. Nakreslete množinu M.

$$f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3 \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (D)

LS 1997-98

Příklad D1 : Platí

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 32.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

10c

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2) \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad C1 : Platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 29.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

11

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

11

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & 26 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 3 & 4 \\ -7 & -17 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad G2: Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech $[x,y] \neq [0,0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1+x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

V bodě $[0,0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|}\right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg}\sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x-1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg}\sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y-2).$$

Příklad G3: Položme

$$F(x,y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

(12) $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

$$\det(A(x)) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= -(1) + (-1) \cdot [x + 1 - (1 + x)] = -1$$

Matice je regulární $\forall x \in \mathbb{R}$

Invers :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -x & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -x & 1-x & -1 \\ 0 & -x & (x-1) & 1 \\ -1 & -x & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{matrix}}_{A^{-1}(x)}\right)$$

13

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{2+1} \cdot y \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -y\left(-y + 1 - (-1+2)\right) + \left(y - 1 - (-2 - x)\right) =$$

$$= y^2 + y + x + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

Reg pro $y^2 + y + x + 1 \neq 0$

14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \left(-1 + 1 - 1 \right) + 1 \cdot \left(1 \right) = \underline{\underline{2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & +2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right. \underbrace{\begin{matrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{matrix}}_{A^{-1}} \left.\right)$$

$$\det(2 \cdot A) = 2^4 \cdot \det A = 2^5 = \underline{\underline{32}}$$

$$\det A^2 = \det A \cdot \det A = 2 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$$

15 (d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A+B) = (-1)^{2+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \left(4 + 3 - (-3)\right) + 2 \cdot \left(4 + (-3) - (3-8)\right)$$

$$= -20 + 12 = \underline{\underline{-8}}$$

$$\det\left((A+B)(A+B)\right) = \det(A+B) \cdot \det(A+B) = \underline{\underline{64}}$$

1 [illegible]

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A^{-1}}$$

$\det(A+I)$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 + 1 - (1+1) + (-1) \cdot \left(-1 -1 - (1+1)\right) = -2 + 4 = \underline{\underline{2}}$$

17AB

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \left(1 + 1 - (-1 + 2) \right) + 3 \cdot \left(+1 + 1 - (1) \right) = -2 + 3 = +1$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (0) + 1 - (2 + 1) = -2$$

$$\det (A^{-1} \cdot B^2) = \frac{1}{1} \cdot (-2)^2 = \underline{\underline{4}}$$

(18)

$$|A+B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A^2 + AB + BA + B^2| = |(A+B)^2| = |0|^2 = 0$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

19

Příklad 1 : Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=1\\ 2x-2y+3z-3t&=-5\\ x+\ y+\ z+\ t&=5\\ 4x+3y-5z+2t&=3 \end{aligned} \quad . \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0, 1]$;

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sin x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy)+\cos(xy)=1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y)=x^4y \qquad M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^4+y^4\le 16, x\ge -1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad A1 : Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x=-3$, $y=13$, $z=2$, $t=-7$. Spočtěme determinant

$$\begin{vmatrix} 1&2&3&4\\ 2&-2&3&-3\\ 1&1&1&1\\ 4&3&-5&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 1&2&3&4\\ 2&-2&3&-3\\ 4&3&-5&2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&-4&1&-5\\ 0&-1&-9&-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 0&1&2&3\\ 0&0&9&7\\ 0&0&-7&1 \end{vmatrix} = 58.$$