# 8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

## Teorie

**Tvrzení 1.** Determinant matice $\mathbf{A}$ typu $(2,2)$ spočteme jako

$$\det \mathbf{A} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{1,2} \cdot a_{2,1}.$$

Determinant matice $\mathbf{A}$ typu $(3,3)$ spočteme jako

$$\det \mathbf{A} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}.$$

**Věta 2.**
- Jestliže se dvě matice liší jen prohozením jedné dvojice řádků, pak $\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A}$.
- Jestliže matice má dva stejné řádky, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
- $$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$
- $$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + b_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$
- $$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \alpha a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix},$$

  kde $\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ označuje matice, které se liší pouze v $i$-tém řádku a jinak se shodují.

**Věta 3.** Čtvercová matice je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

**Definice 4.** Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice typu $(n,n)$. Označme $\mathbf{A}_{i,j}$ matice typu $(n-1, n-1)$, které vzniknou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce. Pak pro každé $r \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\det \mathbf{A} = a_{r,1}(-1)^{r+1} \det \mathbf{A}_{r,1} + a_{r,2}(-2)^{r+2} \det \mathbf{A}_{r,2} + \cdots + a_{r,n}(-n)^{r+n} \det \mathbf{A}_{r,n}.$$

Analogicky lze formulovat pro rozvoj podle $s$-tého sloupce.

**Věta 5.** Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice. Pak $\det \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ a $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

**Věta 6.** Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice. Pak $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

## Příklady

1. Spočtěte determinanty

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$$

2. Spočtěte determinanty

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix}$$

3. Spočtěte determinanty

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}$$

4. Určete determinant matice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a matice $\mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$.

5. Na základě výpočtů ze cvičení (1) a (2) určete, které matice jsou regulární a které singulární.

6. Najděte inverzní matici

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Najděte inverzní matici

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Najděte protipříklad **neplatného** tvrzení $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}$.

9. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ jsou čtvercové matice a platí, že $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$. Je pravda, že pak $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?

**Zkouškové příklady**

10. Spočtěte determinant

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

11. Nalezněte inverzní matici

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje inverzní matice a pak ji spočtěte: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

13. Označme

$\mathbf{D}(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Spočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \det(\mathbf{D}(x,y))$ a určete, pro která $x, y$ je matice regulární.

14. Najděte inverzní matici k $\mathbf{B}$. Spočtěte determinant $\det \mathbf{B}$, $\det \mathbf{B}^2$, $\det 2\mathbf{B}$.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Spočtěte determinant $\det((\mathbf{C} + \mathbf{D})(\mathbf{C} + \mathbf{D}))$.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

16. Najděte inverzní matici k $\mathbf{F}$. Spočtěte determinant $\det(\mathbf{F}+\mathbf{E})$. $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

17. Spočtěte determinant $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^2)$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

18. Spočtěte determinant $\det(\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

19. Spočtěte determinant soustavy

$$\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +3z & +4t & = & 1 \\ 2x & -2y & +3z & -3t & = & -5 \\ x & +y & +z & +t & = & 5 \\ 4x & +3y & -5z & +2t & = & 3 \end{array}$$