Příklad 1. Rozhodněte, které matice jsou ve schodovém tvaru:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{1}, & -2, & 0 \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{1}, & -3, & 0, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & \mathbf{1}, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mathbf{1} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{D}=\begin{bmatrix} -\mathbf{2}, & 1 \\ 0, & -\mathbf{3} \\ 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Řešení: Matice **A**, **B** nejsou ve schodovém tvaru. V matici **A** není nulový řádek uveden úplně dole. Matice **B** má sice nulový řádek správně pod nenulovými řádky, ale první nenulový prvek druhého řádku $\frac{1}{2}$ (vedoucí prvek) není ve sloupci napravo od vedoucího prvku předcházejícího řádku (číslo 1). Matice **C** a **D** jsou ve schodovém tvaru.

Matice **C** je dokonce příkladem *normované schodové matice.* Její vedoucí prvky se rovnají 1 a všechny prvky ve sloupcích nad i pod nimi jsou nulové.

Příklad 2. Najděte všechna řešení systému $\mathbf{Hx}=\mathbf{c}$, kde

$$[\mathbf{H}\mid\mathbf{c}] \;=\; \left[\begin{array}{ccc|c} -5, & -1, & 3 & 3 \\ 0, & 3, & 5 & 8 \\ 0, & 0, & -4 & 8 \end{array}\right].$$

Řešení: Systém lineárních rovnic odpovídající této rozšířené matici je

$$\begin{aligned} -5x_1 - x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_2 + 5x_3 &= 8 \\ -4x_3 &= 8\,. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice vypočteme $x_3=-2$. Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$3x_2+5\,(-2)=8,\quad 3x_2=18,\quad x_2=6.$$

Nakonec dosadíme za x_2 a x_3 do první rovnice a máme

$$-5x_1-6+3\,(-2)=3,\quad -5x_1=15,\quad x_1=-3.$$

Systém má jediné řešení $x_1=-3$, $x_2=6$, $x_3=-2$.

1a **Příklad 3.** Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 10. \end{array}$$

Řešení: Sestavíme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji úpravami R1 až R3 na schodový tvar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0, & 1, & -3 & -5 \\ 2, & 3, & -1 & 7 \\ 4, & 5, & -2 & 10 \end{array}\right]\begin{array}{c} r_2 \\ r_1 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 1, & -3 & -5 \\ 4, & 5, & -2 & 10 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ -2r_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 1, & -3 & -5 \\ 0, & -1, & 0 & -4 \end{array}\right]\begin{array}{c} \\ \\ +r_2 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2, & 3, & -1 & 7 \\ 0, & 1, & -3 & -5 \\ 0, & 0, & -3 & -9 \end{array}\right].$$

Neznámé dostaneme podobně jako v předešlé úloze: $x_3=3$, $x_2=4$, $x_1=-1$. Říkáme také, že soustava má *jediné řešení*, kterým je vektor $\mathbf{x}=[-1,\,4,\,3]^T$.

Frobeniova věta. Uvažujme soustava m lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Jestliže $hod(\mathbf{A}) = hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = k$, potom soustava má řešení.
  - V případě $k = n$ má soustava právě jedno řešení.
  - V případě $k < n$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která mohou být zapsána pomocí $n - k$ parametrů.
- Jestliže $hod(\mathbf{A}) \neq hod(\widetilde{\mathbf{A}})$, potom soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešeni.

Při řešení soustavy lineárních rovnic pomocí **Gaussové eliminační metody** budeme postupovat následovně:

1. Převedeme rozšířenou matici soustavy ekvivalentními úpravami na trojúhelníkový tvar.
2. Pomocí Frobéniovy věty rozhodneme o řešitelnosti soustavy.
3. Rozšířenou matici soustavy převedenou na trojúhelníkový tvar zase zapíšeme jako soustavu rovnic a postupně vypočítáme jednotlivé neznámé.

Příklad 1.4.1. *Řešte soustavy rovnic:*

1b
1c
1d

a) $\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ x - y + 2z &= -4 \\ 3x + 3y - 6z &= -2 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 4y - 2z &= 2 \\ 6x - 2y + z &= 29 \\ 4x - 8y - 4z &= 24 \end{aligned}$ *c)* $\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ y + z &= -2 \\ 4y - 6z &= -12 \end{aligned}$ *d)* $\begin{aligned} 2x + 5y &= 2 \\ -4x + 3y &= -30 \\ 4x + 23y &= -22 \end{aligned}$

Řešení: a) Rozšířenou matici soustavy a upravíme na trojúhelníkový tvar tak, že první řádek odečteme od druhého a trojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$hod(\mathbf{A}) = 2, \quad hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3, \quad 2 \neq 3 \quad \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

b) Rozšířenou matici budeme upravovat následovně:

1. První řádek vydělíme 2 a třetí řádek vydělíme 4.
2. Přehodíme první a třetí řádek.
3. Šestnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku.
4. Přehodíme první a třetí řádek.
5. Pětnásobek druhého řádku odečteme od třetího řádku.
6. Třetí řádek vydělíme 12.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 4 & -8 & -4 & 24 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$hod(\mathbf{A}) = 3$, $hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3$, počet neznámých $n = 3$.
$hod(\mathbf{A}) = hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = n \quad \Rightarrow \quad$ soustava má právě jedno řešení.

K poslední rozšířené matici přiřadíme soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & 6 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array} \Rightarrow z = -1,\ y = \frac{1+z}{2} = 0,\ x = 6+2y+z = 6+0-1 = 5$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 5, \ \ y = 0, \ \ z = -1.}}$

c) Upravujeme rozšířenou matici soustavy:

1. Třetí řádek vydělíme 2.
2. Dvojnásobek druhého řádku odečteme od třetího řádku.
3. Třetí řádek vydělíme -5.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} hod(\mathbf{A}) = 3 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3 \\ n = 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{právě jedno řešení}$$

Dostali jsme soustavu:
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & z & = & -2 \\ & & & & z & = & \dfrac{2}{5} \end{array} \quad \Rightarrow \quad y = -2 - z = -\frac{12}{5}$$

a nakonec $x = 2 - y - z = 2 + \dfrac{12}{5} - \dfrac{2}{5} = 2 + 2 = 4.$

Řešením soustavy je trojice $\underline{\underline{x = 4,\ y = -\frac{12}{5},\ z = \frac{2}{5}.}}$

d) 1. Druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

2. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku a třetí řádek vydělíme 26.

3. Druhý řádek vydělíme 13.

4. Druhý řádek odečteme od třetího řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \\ 4 & 23 & -22 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \\ 0 & 26 & -52 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A}) = 2 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{právě jedno řešení.}$$

Máme řešit soustavu: $\left.\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 5y & = & 2 \\ & & y & = & -2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{2-5y}{2} = 6$

Řešením soustavy je $\underline{\underline{x = 6,\ y = -2.}}$

Příklad 1.4.2. *Rozhodnete o řešitelnosti soustavy s parametrem pomocí Frobéniovy věty.*

2

a) $x + ay = 1$
$ax + 9y = 3$

b) $ax + 4y = 2$
$x + ay = 1$

c) $x + y + z = 1$
$x + ay + z = 1$
$x + y + az = 1$

Řešení: a) Napíšeme rozšířenou matici soustavy a budeme upravovat na trojúhelníkový tvar, stejně jako u soustav bez parametru, odečtením a-násobku prvního řádku od druhého řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 9 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 9-a^2 & 3-a \end{array}\right)$$

Vidíme, že $hod(\mathbf{A}) = 1$ pro $9 - a^2 = 0$ a $hod(\mathbf{A}) = 2$ pokud $9 - a^2 \neq 0$.

$$9 - a^2 = (3-a)(3+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm 3$$

$\underline{\underline{\text{Pro } a \neq \pm 3}}$ máme $hod(\mathbf{A}) = 2,\ hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2,\ n = 2 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$

Musíme ještě vyřešit soustavu pro $a = 3$ a pro $a = -3$. V obou případech si nejdříve dosadíme do upravené řozšířené matice soustavy a rozhodneme pomocí Frobéniovy věty.

$$\underline{\underline{a=3}} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=1 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

$$\underline{\underline{a=-3}} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{soustava nemá řešení.}}}$$

b) Upravujeme rozšířenou matici soustavy.

1. Předpokládejme, že $a \neq 0$. Druhý řádek vynásobíme číslem a.

2. První řádek odečteme od druhého řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ a & a^2 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} a & 4 & 2 \\ 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right)$$

Podobně jako v a) je $hod(\mathbf{A}) = 1$ pro $a^2-4=0$ a $hod(\mathbf{A}) = 2$ pokud $a^2-4 \neq 0$, $a \neq 0$. Máme $a^2-4=(a-2)(a+2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad a=\pm 2$.

$\underline{\underline{\text{Pro } a \neq \pm 2, a \neq 0}}$ je $hod(\mathbf{A}) = 2$, $hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 2$, $n=2 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$

$$\underline{\underline{a=2}} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=1 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

$$\underline{\underline{a=-2}} \Rightarrow \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{soustava nemá řešení.}}}$$

Ještě musíme vyšetřit případ, kdy $\underline{\underline{a=0.}}$

$$\text{Potom } \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=2 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=2 \\ n=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$$

c) Upravujeme rozšířenou matici soustavy tak, že první řádek odečteme od druhého a od třetího řádku.

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Vidíme. že $hod(\mathbf{A}) = 1$ pro $a-1=0$ a $hod(\mathbf{A}) = 3$ pokud $a-1 \neq 0$.

$\underline{\underline{\text{Pro } a \neq 1}}$ je $hod(\mathbf{A}) = 3$, $hod(\widetilde{\mathbf{A}}) = 3$, $n=3 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$

$$\underline{\underline{a=1}}: \widetilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=1 \\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=1 \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nekoněčně mnoho řešení.}}}$$

1e

Příklad 1.4.3. *Řešte soustavy rovnic:*

$a)$ $\begin{aligned} x+y-z&=1\\ x-y+z&=5\\ 2x+y-z&=4\\ 3x+2y-2z&=5 \end{aligned}$ $\quad b)$ $\begin{aligned} x+2y+z-u&=1\\ 2x+3y-z+2u&=3\\ 4x+7y+z&=5\\ 5x+7y-4z+7u&=8 \end{aligned}$ $\quad c)$ $\begin{aligned} 2x+4y+2z-u&=1\\ 3x+6y+3z&=6\\ x+2y+2z-u&=0 \end{aligned}$

Řešení: a) Rozšířenou matici soustavy a upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&-1&1\\ 1&-1&1&5\\ 2&1&-1&4\\ 3&2&-2&5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&-1&1\\ 0&-2&2&4\\ 0&-1&1&2\\ 0&-1&1&2 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&-1&1\\ 0&-1&1&2\\ 0&-1&1&2\\ 0&-1&1&2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1&1&-1&1\\ 0&-1&1&2\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{array}\right)\quad\Rightarrow$$

$hod(\mathbf{A})=2,\;\; hod(\widetilde{\mathbf{A}})=2,\;\; n=3\;\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-hod(\mathbf{A})=3-2=1$ parametru.

K poslední matici přiřadíme soustavu: $\begin{array}{rcrcrcr} x&+&y&-&z&=&1\\ &-&y&+&z&=&2 \end{array}$

Zvolíme si například za $z=p,\; p$ parametr.

Potom máme řešení ve tvaru $\underline{\underline{z=p,\; y=p-2,\; x=3,\;\; p\in\mathbb{R}.}}$

b) Upravujeme rozšířenou matici soustavy:

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&2&1&-1&1\\ 2&3&-1&2&3\\ 4&7&1&0&5\\ 5&7&-4&7&8 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&2&1&-1&1\\ 0&-1&-3&4&1\\ 0&1&3&-4&-1\\ 0&-3&-9&12&3 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&2&1&-1&1\\ 0&1&3&-4&-1\\ 0&-1&-3&4&1\\ 0&-1&-3&4&1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrrr|r} 1&2&1&-1&1\\ 0&1&3&-4&-1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{array}{c} hod(\mathbf{A})=2\\ hod(\widetilde{\mathbf{A}})=2\\ n=4 \end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-hod(\mathbf{A})=4-2=2$ parametrech.

K poslední matici přiřadíme soustavu: $\begin{array}{rcrcrcrcr} x&+&2y&+&z&-&u&=&1\\ &&y&+&3z&-&4u&=&-1 \end{array};$

Zvolíme si $z=p,\; u=q;\;\; p,q$ parametry.

Potom máme řešení $\underline{\underline{z=p,\; u=q,\; y=4q-3p-1,\; x=3-9q+4p;\;\; p,q\in\mathbb{R}.}}$

Druhý řádek první upravené matice, který odpovídá rovnici $5y+4z=4$, jsme dostali přičtením dvojnásobku rovnice $x+2y+z=1$ k rovnici $-2x+y+2z=2$ (tedy přičtením dvojnásobku řádku $(1 \quad 2 \quad 1 \mid 1)$ k řádku $(-2 \quad 1 \quad 2 \mid 2)$) a podobně třetí řádek vznikl z původního třetího řádku odečtením prvního. V dalším kroku jsme jen přehodili řádky (tedy rovnice) a poté jsme odečetli pětinásobek druhého řádku od třetího. Nyní už výsledek získáme zpětnou substitucí. Z poslední rovnice $14z=9$ okamžitě dostáváme $z=\frac{9}{14}$ a dále dopočítáme

$$y=-1+2z=-1+\frac{9}{7}=\frac{2}{7} \quad \text{a} \quad x=1-2y-z=1-\frac{4}{7}-\frac{9}{14}=-\frac{3}{14}.$$

Vidíme, že jediné řešení soustavy je $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$.

Uvědomme si, že můžeme k výsledku dospět i v maticovém zápisu, tj. můžeme levou stranu matice posloupností elementárních úprav převést až na jednotkovou matici: :

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{14} \end{array}\right).$$

□

1f

1.2. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Znovu si soustavu zapíšeme do matice a poté ji pomocí přičtení vhodného násobku jedné rovnice k rovnici druhé upravíme stejně jako v předchozí úloze:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{5} & 4 & 4 \end{array}\right),$$

Vidíme, že se pivoty (v druhé matici vyznačeny tučně) nachází v prvním a druhém sloupci a volná proměnná je tedy ta, která odpovídající třetímu sloupci. Nyní si snadno uvědomíme (a na přednášce byl tento fakt vysloven v pozorování 2.16), že dosadíme-li za z libovolnou hodnotu, pak jednoznačně dopočítáme y a x. Položíme-li například $z=0$, pak z rovnice $5y+4\cdot 0=4$ dostáváme, že $y=\frac{4}{5}$ a z rovnice $x+2\cdot\frac{4}{5}+0=1$ spočítáme, že $x=-\frac{3}{5}$. Našli jsme tedy jedno řešení dané soustavy, které můžeme zapsat do trojice $(x,y,z)^T=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5},0)^T$. Dosadíme-li za z obecný reálný prvek t můžeme zpětnou substitucí dopočítat y:

$$5y+4\cdot t=4 \Rightarrow y=\frac{4}{5}-\frac{4}{5}t$$

a poté stejným způsobem i x:

$$x+2\cdot y+z=1 \Rightarrow x=1-2\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{5}t\right)-t=-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}t.$$

Obecné řešení má tedy tvar $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}t \\ \frac{4}{5} - \frac{4}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ a množina všech řešení soustavy je právě $\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Na závěr si připomeňme geometrický význam řešení dané soustavy: každou z rovnic chápeme jako rovinu v $\mathbb{R}^3$ (tvořenou všemi trojicemi (x, y, z), které rovnici řeší) a množina řešení celé soustavy je průnik těchto dvou rovin. Všimneme-li si navíc, že roviny zjevně nejsou rovnoběžné, musí množinu všech řešení tvořit přímka, jejíž jeden bod $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ už jsme našli a jejíž směr je dán vektorem $(3, -4, 5)$, který je právě o netriviální řešení soustav rovnic se stejnými levými a nulovými pravými stranami. Z geometrického náhledu tedy vidíme, že množin všechna řešení je přímka, kterou můžeme vyjádřit ve tvaru $\{(-\frac{3}{5} + 3t, \frac{4}{5} - 4t, 5t)^T \mid t \in \mathbb{R}\}$. $\square$

1.3. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}$$

Soustavu si opět můžeme zapsat do matice a poté ji (jedinou elementární řádkovou úpravou) upravíme na odstupňovanou matici:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right)$$

Nyní už snadno jednoznačně dopočítáme neznámé zpětnou substitucí. Z posledního řádku $5x_4 = 5$ dostáváme, že $x_4 = 1$, z předposledního řádku $-x_3 + 2x_4 = 0$ vidíme, že $-x_3 + 2 = 0$, tedy $x_3 = 2$. Dále z druhé rovnice $x_2 + x_3 + x_4 = 3$ obdržíme $x_2 = 0$ a konečně z rovnice $x_1 + x_2 - x_4 = 1$ dostaneme $x_1 = 2$. Vidíme, že existuje jediné řešení soustavy $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 0, 2, 1)^T$. $\square$

1.4. Najděte všechna reálná řešení soustavy rovnic s maticí *a)* $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$,

1g

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$, *c)* $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Ve všech případech postupujeme standardně posloupností elementárních úprav:
a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right), \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),$$

Vidíme, že původní soustava je ekvivalentní se soustavou požadující rovnost $0 = 2$, tedy množina řešení je prázdná.

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Obdrželi jsme matici hodnosti 3 s čtvrtým volným sloupcem (pivoty jsme opět vyznačili tučně). Zvolíme-li opět za čtvrtou neznámou u parametr libovolnou reálnou hodnotu t, dopočítáme zpětnou substitucí:

$$z = \frac{3}{5} - \frac{2}{5}t,\ y = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5}t,\ x = \frac{2}{5} - \frac{3}{5}t$$

Zjistili jsme, že $\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ je množina všech řešení dané soustavy.

Protože čtveřice $(1, 0, 1, -1)^T$ rovněž řeší danou soustavu a vektor $(3, 1, 2, -5)$ řeší homogenní variantu naší soustavy, snadno můžeme nahlédnout, že množinu všech řešení také můžeme popsat ve tvaru $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

19 c)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right).$$

Získali jsme odstupňovanou matici, v níž jsou bez pivotů 2., 4., 5. a 6. sloupec, tedy volné jsou jim odpovídající proměnné. Označíme-li si neznámé postupně $x_1, \ldots, x_6$, pak pro libovolná $t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}$ položíme

$$x_2 = t_2,\ x_4 = t_4,\ x_5 = t_5,\ x_6 = t_6$$

a zpětnou substitucí dopočítáme

$$x_3 = 1 + 2t_4 + 5t_5 - 3t_6 \text{ a poté } x_1 = 1 - t_2 - t_4 - 2t_5 + t_6.$$

Nyní obvyklým způsobem popíšeme množinu všech řešení soustavy:

$$\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_5 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mid t_2, t_4, t_5, t_6 \in \mathbb{R}\}$$

□

1.2 Ekvivalentní úpravy matic, hodnost matice

Ekvivalentní úprava nebo také elementární transformace matice — jedna z následujících tři úprav:

1. záměna dvou řádků (sloupců) matice,
2. vynásobení jednoho řádku (sloupce) nenulovým číslem,
3. připočtení jednoho řádku (sloupce) jinému.

Ekvivalentní matice — dvě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu, kde matice $\mathbf{A}$ se dá upravit pomocí elementárních transformací na matici $\mathbf{B}$. Píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Hodnost matice — počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) v matici. Značíme $hod(\mathbf{A})$.

Poznámka. Pokud platí, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, potom $hod(\mathbf{A}) = hod(\mathbf{B})$. Z toho plyne velice jednoduchá metoda na počítání hodnosti matic. Když chceme počítat $hod(\mathbf{A})$, tak tuto matici pomocí řádkových ekvivalentních úprav upravíme na trojúhelníkovou matici $\mathbf{B}$. Je jasné, že počet lineárně nezávislých řádků v matici $\mathbf{B}$ se rovná počtu nenulových řádků této matice. Tím získáme i $hod(\mathbf{A})$.

Poznámka. Platí, že $hod(\mathbf{A}) = hod(\mathbf{A}^T)$. Znamená to, že je jedno, jestli při počítání hodnosti používáme ekvivalentní řádkové úpravy, anebo sloupcové úpravy.

Příklad 1.2.1. *Vypočítejte hodnosti následujících matic:*

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \text{ b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \text{ c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) Upravovat začínáme v levým horním rohu matice $\mathbf{A}$. Budeme provádět následující ekvivalentní řádkové úpravy:

1. Zaměníme první a druhý řádek v matici $\mathbf{A}$. Tím získáme jedničku v levým horním rohu.

2. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku. Jinými slovy k druhému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku.

3. Po předchozí úpravě je první řádek a první sloupec podle našich představ. Při další úpravě postupujeme, jako kdyby jsme chtěli upravit na trojúhelníkový tvar matici typu 2×2, která by vznikla vynecháním prvního řádku a prvního sloupce. Táto submatice už má v levým horním rohu jedničku. Jako poslední úpravu třikrát druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme trojúhelníkovou matici. Spočítame nenulové řádky: $\underline{\underline{hod(\mathbf{A}) = 3.}}$

b) 1. V matici **B** trojnásobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a zároveň dvojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Druhý řádek vydělíme 13 a zároveň třetí řádek vydělíme -6.

3. Druhý řádek odečteme od třetího řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 13 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{hod(\mathbf{B}) = 2.}}$$

c) 1. V matici **C** nejdříve dvojnásobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a zároveň sedmnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Zaměníme druhý a třetí řádek.

3. Dvojnásobek druhého řádku přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{hod(\mathbf{C}) = 2.}}$$

Příklad 1.2.2. *Zjistěte hodnost matice* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$ *v závislosti na parametru* p.

Řešení: 1. V matici **A** přičteme první řádek druhému řádku a zároveň dvojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Druhý řádek vydělíme pěti.

3. Trojnásobek druhého řádku přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & p-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p-3 \end{pmatrix}$$

Pokud $p - 3 = 0$ ($p = 3$) matice má dvě nenulové řádky, jinak má matice nenulové řádky tři. Z toho plyne, že pokud $\underline{\underline{p = 3 \Rightarrow hod(\mathbf{C}) = 2}}$ a v případě, kdy $\underline{\underline{p \neq 3 \Rightarrow hod(\mathbf{C}) = 3.}}$

Příklad 1.2.3. *Vypočítejte hodnosti následujících matic:*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -10 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Řešení: a) $hod(\mathbf{A}) = 2$; b) $hod(\mathbf{B}) = 2$; c) $hod(\mathbf{C}) = 3$.

Poznámka

Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ *typu (m, n) bychom mohli definovat pomocí sloupcových vektorů z vektorového prostoru* V_m. *Obě definice vedou k témuž výsledku* $h(\boldsymbol{A}) = r$.

Věta 2.4.2. Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná matice typu (m, n). Hodnost matice $\mathbf{A}$ se nezmění při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

1. záměně pořadí řádků (sloupců),
2. násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
3. přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
4. vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Důkaz: Žádná z uvedených úprav nemění počet lineárně nezávislých řádků či sloupců.

Poznámka

Dvě matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, *které mají stejnou hodnost* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$, *nazýváme* ***ekvivalentními*** *a značíme* $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Řešené úlohy

Příklad Určeme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Budeme upravovat matici $\mathbf{A}$ podle věty 2. Ke 2. řádku přičteme (-1) násobek 1. řádku a ke 4. řádku (-2) násobek 2. řádku

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} .(-1) \\ \\ \\ \end{matrix} \; .(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

3. a 4. řádek můžeme vynechat (dle 4. bodu věty 2).

Je vidět, že v upravené matici jsou dva lineárně nezávislé řádky, tzn., že hodnost matice $\mathbf{A}$ je dvě, $h(\mathbf{A}) = 2$.

? Kontrolní otázky ?

1. Pro inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k čtvercové matici $\mathbf{A}$ platí

   a) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

   b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

   c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$, kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice.

2. Čtvercová matice $\mathbf{A}$, jejíž determinant $\det\mathbf{A}=0$ se nazývá

   a) singulární,

   b) nulová,

   c) regulární.

3. Inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ existuje

   a) když $\mathbf{A}$ je singulární matice,

   b) vždy, když $\mathbf{A}$ je čtvercová matice,

   c) když $\mathbf{A}$ je regulární matice.

4. Adjungovaná matice $\tilde{\mathbf{A}}$ je vytvořená

   a) z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}^T$ (tj. matice transponovaná k původní matici $\mathbf{A}$),

   b) ze subdeterminantů prvků matice $\mathbf{A}$,

   c) z algebraických doplňků prvků matice $\mathbf{A}$.

5. Hodnost matice $\mathbf{A}$ je číslo r, které udává

   a) maximální počet lineárně závislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$,

   b) maximální počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) matice $\mathbf{A}$,

PŘÍKLADY Z LA
I. SEMESTR

PAVEL RŮŽIČKA

1. Soustavy lineárních rovnic

Příklad 1.1. *Určete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body* $(0,2)$, $(1,5)$ *a* $(-1,1)$.

Řešení. Hledáme čísla a, b, c tak, aby dané tři body vyhovovaly rovnici

$$ax^2 + bx + c = y.$$

Po dosazení dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & c & = & 2, \\ a & + & b & + & c & = & 5, \\ a & - & b & + & c & = & 1 \end{array}$$

Z první rovnice dostáváme, že $c = 2$. Dosadíme do zbývajících rovnic:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & 2 & = & 5, \\ a & - & b & + & 2 & = & 1 \end{array}$$

a sečtením druhé a třetí rovnice dostaneme, že

$$2a + 4 = 6,$$

odkud plyne $a = 1$. Dosadíme do třetí rovnice:

$$1 - b + 2 = 1$$

a dostaneme $b = 2$. Dané tři body tedy leží na grafu jediné kvadratické funkce

$$y = x^2 + 2x + 2.$$

Cvičení 1.1. *Určete kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body* $(1,-3)$, $(-1,-5)$ *a* $(2,-5)$.

Řešení. $y = -x^2 + x - 3$.

Příklad 1.2. *Určete souřadnice středu kružnice procházející body* $(0,1)$, $(-1,1)$ *a* $(2,0)$.

Řešení. Obecná rovnice kružnice je

$$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2. \tag{1.1}$$

Pokud bychom hledali rovnici kružnice procházející trojicí daných bodů (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), dostali bychom po dosazení do rovnice (1.1) soustavu

$$\begin{aligned}(x_1-a)^2 &+ (y_1-b)^2 &= c^2,\\ (x_2-a)^2 &+ (y_2-b)^2 &= c^2,\\ (x_3-a)^2 &+ (y_3-b)^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Tuto soustavu upravíme podobně jako v Úloze 1.2.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1^2 & - & x_2^2 & - & 2(x_1-x_2)a & + & y_1^2 & - & y_2^2 & - & 2(y_1-y_2)b & = 0,\\ x_2^2 & - & x_3^2 & - & 2(x_2-x_3)a & + & y_2^2 & - & y_3^2 & - & 2(y_2-y_3)b & = 0,\\ x_3^2 & - & 2x_3a & + & a^2 & + & y_3^2 & - & 2y_3b & + & b^2 & = c^2.\end{array}$$

Pro naše konkrétní body mají první dvě rovnice výsledné soustavy tvar

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0^2 & - & (-1)^2 & - & 2(0-(-1))a & + & 1^2 & - & 1^2 & - & 2(1-1)b & = 0,\\ (-1)^2 & - & 2^2 & - & 2((-1)-2)a & + & 1^2 & - & 0^2 & - & 2(1-0)b & = 0,\end{array}$$

odkud

$$\begin{array}{ccccccccc} -1 & - & 2a & & & & & = 0,\\ -3 & + & 6a & + & 1 & - & 2b & = 0.\end{array}$$

Z první rovnice dostaneme, že $a=-1/2$ a po dosazení do druhé z rovnic $b=-5/2$. □

Cvičení 1.2. *Určete rovnici kružnice, která prochází body* $(-3,0)$, $(3,0)$ *a* $(0,1)$.

Řešení. $x^2+(y+4)^2=5^2$.

Cvičení 1.3. *Určete rovnici kružnice, která prochází body* $(-1,0)$, $(1,-1)$ *a* $(3,-2)$.

Řešení. Body leží na přímce.

Příklad 1.3. *Nalezněte parametrické vyjádření roviny* ρ *určené rovnicí*

$$x-y+2z=1. \tag{1.2}$$

Řešení. Položíme $y=s$ a $z=t$. Po dosazení do rovnice (1.2) dostaneme

$$\begin{aligned}x&=1+s-2t,\\ y&=s,\\ z&=t\end{aligned}$$

a máme tedy

$$(x,y,z)=(1,0,0)+(1,1,0)s+(-2,0,1)t.$$

Příklad 1.1.5. *Vypočítejte matici* $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, *kde*

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení:

a) Matice **A** je typu typu 2×3 a **B** je typu typu 3×3 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, která bude typu 2×3.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 2 - 1\cdot 0 & 2\cdot 3 + 1\cdot 2 - 1\cdot 4 & 2\cdot 0 + 1\cdot(-2) - 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 - 3\cdot 2 + 2\cdot 0 & -1\cdot 3 - 3\cdot 2 + 2\cdot 4 & -1\cdot 0 - 3\cdot(-2) + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

b) Matice **A** je typu typu 3×3 a **B** je typu typu 3×4 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} * \mathbf{B}$, která bude typu 3×4.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -8 & 13 & 38 \\ 4 & -4 & 14 & -6 \\ -31 & 16 & -19 & -20 \end{pmatrix}.$$

c) Matice **A** je typu 3×5 a **B** je matice typu 4×3, tzn. počet sloupců matice **A** se nerovná počtů řádků matice **B**, tehdy se nedá vypočítat $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. V tomto případě by bylo možné vypočítat součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ a byla by to matice typu 4×5.

Příklad 1.1.6. *Vypočítejte matice* $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *a* $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, *kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice **A** je typu typu 2×3, **B** je typu typu 3×2 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, která bude typu 2×2 a také matice $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, která bude typu 3×3.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -21 & 20 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}}}.$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -9 & 8 & 11 \\ 16 & -22 & -4 \\ 4 & -9 & 6 \end{pmatrix}}}.$$

Poznámka. Násobení matic není komutatívní operace – obecně $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Příklad 1.1.7. *Vypočítejte matice* $\mathbf{X} = \mathbf{A}^2$ *a* $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, *kde* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Matice **X** a i matice **Y** existují a budou to matice typu 2×2.

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 37 & 18 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}}}.$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 34 & 23 \\ 23 & 17 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.1.8. *Vypočítejte matice* $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$ *a* $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$, *kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}}}.$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -7 & 15 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} +$$
$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2+7 & 7+16-6 \\ -7+18-4 & 15-14+7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.1.9. *Vypočítejte matici* $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, *kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je <u>nulová matice</u> typu 3×2.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad 1 : Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4t&=1\\ 2x-2y+3z-3t&=-5\\ x+\ y+\ z+\ t&=5\\ 4x+3y-5z+2t&=3 \end{aligned}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0,1]$;

$$f(x,y)=\sqrt{y+\sin x}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy)+\cos(xy)=1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y)=x^4y \qquad M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^4+y^4\le 16, x\ge -1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad A1 : Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x=-3$, $y=13$, $z=2$, $t=-7$. Spočtěme determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -2 & 3 & -3\\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & 1 & -5\\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 9 & 7\\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 58.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A a rozhodněte, zda platí $\det A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = 2x + 4y \qquad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x + 1)(x^2 + x + 1)}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad B1 : Převeďme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54, \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad B2 : Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|(x+t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t} |2x + t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x,y) = f(y,x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1,2]$ spojité. Proto v bodě $[1,2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2).$$

Příklad B3 : Položme

$$F(x,y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = x^{(y^x)}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y) = (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \qquad M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+4y^2 \leq 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (F)

LS 1997-98

Příklad F1 : Upravme matici A pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice:

$$\begin{aligned} h(A) &= h\begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ x & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2x & 2+3x \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2x & 2+3x \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pokud $x \neq 0$, je hodnost matice rovna 3. V případě, že $x = 0$, je hodnost matice A rovna 2.

Příklad F2 : Funkce f je definována na $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$. Pro funkci f platí:

$$f(x, y) = \exp(y^x \log x).$$

V bodech $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(y^x \cdot \log y \cdot \log x + y^x \cdot \frac{1}{x} \right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \exp(y^x \log x) \cdot \left(x y^{x-1} \cdot \log x \right).$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + 2 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y - 2).$$

Příklad F3 : Položme

$$F(x, y) = y^3 x^2 + y^2 x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3 x + 2y^2 x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2 x^2 + 2y x^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3 x^2 + \varphi(x)^2 x^2 + \sin \varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$3\varphi(x)^2 \varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^3 x + 2\varphi(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)^2 x + \cos \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 3\varphi(x)^2 \varphi''(x) x^2 + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x + 6\varphi(x)^2 \varphi'(x) x$$
$$+ 2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x) x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x) x$$
$$+ 4\varphi(x)\varphi'(x) x + 2\varphi(x)^2 - \sin \varphi(x) \cdot \varphi'(x)\varphi'(x) + \cos \varphi(x) \cdot \varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad (10\ \text{bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x\cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x\sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad (10\ \text{bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \qquad (15\ \text{bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot (-x \sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x \cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, y) - f(t, 0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva $(-\infty)$ se nerovná limitě zprava $(\cos y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{t \to y} \frac{f(0, t) - f(0, y)}{t - y} = \lim_{t \to y} \frac{0}{t - y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad 1 : Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad I1 : Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a proveďme Gaussovu eliminaci:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3.$

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+y-1)^2}, \qquad [x,y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0,0]\}.$$

V bodě $[0,0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1. To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ neexistuje.

V bodě $[1,2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x-1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y-2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x,y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1 + (y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{2y + x}{1 + (y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy