6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/, kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1 (Gaussova eliminace)**.** *Gaussovou eliminací* rozumíme algoritmus řešení soustav lineárních rovnic. Povoleny jsou tyto úpravy:

1. Prohození dvou řádků/sloupců.
2. Vynásobení řádku nenulovou konstantou.
3. Přičtení libovolného násobku nějakého řádku k jinému. (Např. 2. řádek opíšeme a na místo 3. řádku napíšeme 2.+3. řádek.)
4. Odstranění nulového řádku.

Symbolem $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ označujeme, že matice $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ konečným počtem povolených úprav.

Definice 2. Nechť $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ je matice typu (m, n). *Transponovanou maticí* rozumíme matici $\mathbf{A}^T = (a_{j,i})$ typu (n, m). (Transponovaná matice tedy vznikne přepsáním řádků do sloupců (a naopak).)

Definice 3. *Hodností matice* $h(\mathbf{A})$ rozumíme počet jejích nezávislých řádků (nebo sloupců).

Proposition 4. Pro každou matici platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Věta 5 (Frobeniova)**.** Soustava $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ má řešení právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Příklady

1. Vyřešte soustavy rovnic

(a)
$$\begin{array}{rrrcr} & y & -3z & = & -5 \\ 2x & +3y & -z & = & 7 \\ 4x & +5y & -2z & = & 10 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & -y & +2z & = & -4 \\ 3x & +3y & -6z & = & -2 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rrrcr} & 4y & -2z & = & 2 \\ 6x & -2y & +z & = & 29 \\ 4x & -8y & -4z & = & 24 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rrcr} 2x & 5y & = & 2 \\ -4x & +3y & = & -30 \\ 4x & +23y & = & -22 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & 1 \\ x & -y & +z & = & 5 \\ 2x & +y & -z & = & 4 \\ 3x & +2y & -2z & = & 5 \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ -2x & +y & +2z & = & 2 \end{array}$$

(g)
$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2. Rozhodněte o řešitelnosti soustav za pomoci Frobeniovy věty. $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

(a) $\begin{array}{rrcl} x & +ay & = & 1 \\ ax & +9y & = & 3 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rrcl} ax & +4y & = & 2 \\ x & +ay & = & 1 \end{array}$ (c) $\begin{array}{rrrcl} x & +y & +z & = & 1 \\ x & +ay & +z & = & 1 \\ x & +y & +az & = & 1 \end{array}$

3. Určete hodnost matice (případně v závislosti na parametru)

(a) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4. Násobte matice

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 8 & 0 \\ -6 & -3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

5. Najděte kvadratickou funkci, jejíž graf prochází body $(0, 2)$, $(1, 5)$ a $(-1, 1)$.

6. Najděte střed kružnice, která prochází body $(0, 1)$, $(-1, 1)$ a $(2, 0)$.

Zkouškové příklady

7. Najděte řešení soustavy rovnic

(a) $\begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +3z & +4t & = & 1 \\ 2x & -2y & +3z & -3t & = & -5 \\ x & +y & +z & +t & = & 5 \\ 4x & +3y & -5z & +2t & = & 3 \end{array}$

(b) soustava $\mathbf{A}x = b$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

8. Určete hodnost matice (v závislosti na případném parametru)

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$