

Tečná rovina τ je pak dána rovnicí

$$\tau : \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{A})(z - z_0) = 0.$$

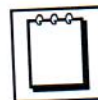
Věta 5.3.6.

Nechť $z = f(x, y)$ je implicitní funkce určená rovnicí $F(x, y, z) = 0$ a bodem $\mathbf{A} = [x_0, y_0, z_0]$. **Tečná rovina** ke grafu implicitní funkce $z = f(x, y)$ v bodě \mathbf{A} bude určena rovnicí

$$\tau : \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{A})(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{A})(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{A})(z - z_0) = 0.$$

Poznámka

Všimněte si, že na levé straně rovnice tečné roviny vystupuje diferenciál funkce F v bodě \mathbf{A} .

**Řešené úlohy**

Příklad 5.3.1. Vypočítejte y' , y'' implicitní funkce dané rovnicí

$$(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$$

v bodě $[0, 1]$.

Řešení:

1. Nejdříve při určení y' vyjdeme z věty 5.3.2.

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3,$$

vypočítáme jednotlivé parciální derivace funkce F podle proměnných x a y v bodě $[0, 1]$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = (2(x^2 + y^2)2x - 6xy) \Big|_{[0,1]} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = (2(x^2 + y^2)2y - 3x^2 - 3y^2) \Big|_{[0,1]} = 1.$$



Dosadíme do vzorce pro derivaci implicitní funkce a dostáváme

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2} \Big|_{[0,1]} = -\frac{0}{1} = 0.$$

2. Jiný způsob jak najít y' . V rovnici $(x^2 + y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ prohlásíme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x . Necht' $y = y(x)$, pak

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') - 3(2xy + x^2y') - 3y^2y' = 0.$$

Aby bylo zcela jasné, jak jsme k předcházející rovnici dospěli, rozeberme si podrobně, jak se derivují funkce v této rovnici, konkrétně $-3x^2y$ a $-y^3$. Znovu zdůrazněme, že jsme předpokládali závislost y na x , tedy $y = y(x)$. Derivujeme $-3x^2y$ podle pravidla o součinu dvou funkcí proměnné x ,

$$(-3x^2y)' = -3(x^2y)' = -3[(x^2)'y + x^2(y)'] = -3(2xy + x^2y').$$

Zde derivace y podle x není nula, protože jsme předpokládali, že y závisí na x . Derivace y podle x se bude značit standardně, y' .

Derivujeme $-y^3$ podle pravidla o derivaci složené funkce,

$$(-y^3)' = -(y^3)' = -3y^2y'.$$

Řekněme, že si pro lepší názornost zvolíme nějakou konkrétní závislost y na x , např. necht' $y = \sin x$. Tedy $-y^3 = -\sin^3 x$. Jak bude vypadat derivace v tomto konkrétním případě?

$$\begin{aligned} (-y^3)' &= -(y^3)' \stackrel{y=\sin x}{=} -(\sin^3 x)' = -3 \sin^2 x \cos x \\ &= -3 \sin^2 x (\sin x)' \stackrel{\sin x=y}{=} -3y^2(y)' = -3y^2y'. \end{aligned}$$

Vraťme se k původní úloze. Poté co jsme rovnici derivovali podle x , stačí nyní vyjádřit z této derivované rovnice y' ,

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4yy' + 4xy^2 + 2y^3y' - 6xy - 3x^2y' - 3y^2y' &= 0, \\ (4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2)y' &= -4x^3 - 4xy^2 + 6xy, \\ y' &= -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2}, \end{aligned}$$

dosadíme bod $[0, 1]$ a dostaneme výsledek

$$y'(0) = -\frac{0}{1} = 0.$$

Příklad 5.3.2. Vypočítejte y' , y'' , implicitní funkce $y = f(x)$ určené rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

v bodě $[1, 1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.2. Ze zadání dostáváme $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \Bigg|_{[1,1]} = -\frac{2x+y}{x+2y} \Bigg|_{[1,1]} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Pro určení druhé derivace využijeme vztah uvedený za větou 5.3.2. Vypočítáme jednotlivé hodnoty parciálních derivací a determinant matice vytvořené z těchto hodnot. Tedy,

$$y''(1) = f''(1) = \frac{1}{(x+2y)^3} \Bigg|_{[1,1]} \begin{vmatrix} 0 & (2x+y) \Big|_{[1,1]} & (x+2y) \Big|_{[1,1]} \\ (2x+y) \Big|_{[1,1]} & 2 \Big|_{[1,1]} & 1 \Big|_{[1,1]} \\ (x+2y) \Big|_{[1,1]} & 1 \Big|_{[1,1]} & 2 \Big|_{[1,1]} \end{vmatrix},$$

$$y''(1) = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-18) = -\frac{2}{3}.$$

2. Totéž můžeme získat i jiným způsobem. Budeme předpokládat v rovnici implicitní funkce závislost y na x , rovnici derivujeme podle x a vyjádříme y' .

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+2y} \Rightarrow y'(1) = -\frac{3}{3} = -1.$$

K získání druhé derivace implicitní funkce y'' musíme rovnici implicitní funkce derivovat dvakrát podle x a vyjádřit y'' . Rovnici implicitní funkce jsme již jednou

derivovali, stačí ji derivovat ještě jednou podle x ,

$$(2x + y + xy' + 2yy' = 0)' \Rightarrow 2 + y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0,$$

$$2 + 2y' + 2(y')^2 + (x + 2y)y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{2 + 2y' + 2(y')^2}{x + 2y}$$

$$y''(1) = -\frac{2 + 2 \cdot (-1) + 2(-1)^2}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

Příklad 5.3.3. Nalezněte derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí

$$x \sin y + \cos 2y = \cos y.$$

Řešení:

1. S využitím věty 5.3.2. a pro $F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y$ dostáváme

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}, \quad x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \neq 0.$$

2. Předpokládejme v rovnici implicitní funkce závislost y na x , derivujme rovnici podle x a vyjádřeme y' . Tedy

$$\sin y + x \cos yy' + \sin yy' - 2 \sin 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y},$$

příčemž

$$x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \neq 0.$$

Příklad 5.3.4. Nalezněte parciální derivace prvního řádu funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$$

v bodě $[1, 1, 1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.5. Pro $F(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4$

dosadíme bod $[0, \pi]$ a dostáváme

$$y'(0) = -\frac{\pi}{-1 + 2\pi}.$$

Příklad 7.10. Ověřte, že rovnice $x^2 + xy^2 - y^2 = 1$ zadává v bodě $[-2, 1]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Vypočítejte její první a druhou derivaci a napište Taylorův polynom $T_2(x)$ se středem v bodě -2 .

Řešení. Označme $F(x, y) = x^2 + xy^2 - y^2 - 1$, $[x_0, y_0] = [-2, 1]$. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2. Funkce F má spojité parciální derivace v \mathbb{R}^2 . Jelikož $F(-2, 1) = (-2)^2 - 2 - 1 - 1 = 0$ a

$$F_y(x, y) = 2xy - 2y \quad \Rightarrow \quad F_y(-2, 1) = -6 \neq 0,$$

jsou předpoklady věty 7.2 splněny. Rovnicí $x^2 + xy^2 - y^2 - 1 = 0$ je v okolí bodu $[-2, 1]$ určena implicitně funkce $y = f(x)$ mající derivace všech řádů, pro niž platí, že $f(-2) = 1$. Protože

$$F_x(x, y) = 2x + y^2 \quad \Rightarrow \quad F_x(-2, 1) = -3,$$

je podle (7.1)

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x + y^2}{2xy - 2y} \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = -\frac{1}{2}.$$

Druhou derivaci $y''(x)$ spočteme podle věty 7.4 derivováním první derivace a dostaneme

$$\begin{aligned} y'' &= (y')' = \left(-\frac{2x + y^2}{2xy - 2y} \right)' = \\ &= -\frac{(2 + 2yy')(2xy - 2y) - (2x + y^2)(2y + 2xy' - 2y')}{(2xy - 2y)^2} = \\ &= -\frac{(2 - 2y\frac{2x+y^2}{2xy-2y})(2xy - 2y) - (2x + y^2)(2y - 2x\frac{2x+y^2}{2xy-2y} + 2\frac{2x+y^2}{2xy-2y})}{(2xy - 2y)^2} = \\ &= -\frac{-4y^2 - 3y^4 + 4x^2}{y(2xy - 2y)^2}. \end{aligned}$$

Hodnota druhé derivace $y''(x)$ v bodě -2 je

$$y''(-2) = f''(-2) = -\frac{-4 - 3 + 4(-2)^2}{(2(-2) - 2)^2} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}.$$

Jelikož jsme spočetli první i druhou derivaci, můžeme funkci $y = f(x)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $x_0 = -2$. Taylorův polynom $T_2(x)$ má tvar

$$T_2(x) = f(-2) + f'(-2)(x+2) + \frac{1}{2}f''(-2)(x+2)^2,$$

tudíž

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+2) - \frac{1}{8}(x+2)^2.$$

Příklad 7.11. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2} \sin y = x$ zadává v bodě $[\pi, \pi]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$, a najděte rovnice tečny a normály ke grafu této funkce v bodě $[\pi, \pi]$.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x, y) = y - \frac{1}{2} \sin y - x$ a pro $[x_0, y_0] = [\pi, \pi]$. Funkce F má spojité parciální derivace v \mathbb{R}^2 . Platí $F(\pi, \pi) = \pi - \frac{1}{2} \sin \pi - \pi = \pi - 0 - \pi = 0$ a

$$F_y(x, y) = 1 - \frac{1}{2} \cos y \quad \Rightarrow \quad F_y(\pi, \pi) = \frac{3}{2} \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnicí $y - \frac{1}{2} \sin y - x = 0$ je v okolí bodu $[\pi, \pi]$ určena implicitně právě jedna funkce $y = f(x)$ pro niž platí $f(\pi) = \pi$. Hledáme tečnu k implicitně dané funkci. Budeme vycházet z rovnice tečny t ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, y_0 = f(x_0)]$, tj. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Dosadíme do rovnice za f' vzorec (7.1) a dostáváme

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

Parciální derivaci F_y již spočtenou máme, dopočteme parciální derivaci F_x

$$F_x(x, y) = -1 \quad \Rightarrow \quad F_x(\pi, \pi) = -1.$$

Derivace f' v bodě $x = \pi$ je

$$f'(\pi) = -\frac{F_x(\pi, \pi)}{F_y(\pi, \pi)} = -\frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Rovnice tečny t je

$$y - \pi = \frac{2}{3}(x - \pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}x - y + \frac{1}{3}\pi = 0.$$

Normála n je přímka kolmá k tečně, využijeme faktu, že směrový vektor tečny je stejný jako normálový vektor normály. V našem případě je normálový vektor tečny $\mathbf{n}_t = (\frac{2}{3}, -1)$, směrový vektor tečny $\mathbf{s}_t = (1, \frac{2}{3})$ je totožný s normálovým vektorem normály n . Tudíž rovnice normály n je daná rovnicí $x + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}\pi = 0$.

Poznámka 7.12. Hodnota $-\frac{5}{3}\pi$ se dopočte dosazením normálového vektoru normály $\mathbf{n}_n = (1, \frac{2}{3})$ a bodu $[\pi, \pi]$ do obecné rovnice přímky v rovině.

Příklad 7.13. Ověřte, že rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ zadává v bodě $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně jedinou funkci $y = f(x)$. Rozhodněte, zda graf této funkce dané implicitně leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou nebo nad tečnou.

Řešení. Ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 7.2 pro funkci $F(x, y) = y - \frac{1}{2}\sin y - x$ a pro $[x_0, y_0] = [\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Funkce F má spojité parciální derivace v \mathbb{R}^2 . Platí $F(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi-1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi-1}{2} = 0$ a

$$F_y(x, y) = 1 - \frac{1}{2}\cos y \quad \Rightarrow \quad F_y\left(\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.2 jsou splněny, takže rovnice $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ určuje implicitně právě jednu funkci $y = f(x)$ mající derivace všech řádů takovou, že $f(\frac{\pi-1}{2}) = \frac{\pi}{2}$. K tomu, abychom určili, zda bod $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ leží pod nebo nad tečnou, musíme spočítat druhou derivaci podle x . Budeme určovat, zda implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konvexní nebo konkávní. Derivujeme-li rovnici $y - \frac{1}{2}\sin y - x = 0$ podle x (připomeňme si, že uvažujeme y jako funkci proměnné x), dostáváme

$$y' - \frac{1}{2}y' \cos y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' \left(\frac{\pi-1}{2}\right) = 1.$$

Dalším derivováním podle x (s využitím věty 7.4) obdržíme

$$y'' - \frac{1}{2}y'' \cos y + \frac{1}{2}(y')^2 \sin y = 0$$

a odtud

$$y'' = \frac{-\frac{1}{2}(y')^2 \sin y}{1 - \frac{1}{2}\cos y}.$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu bod $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$, dostaneme $y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$. To znamená, že křivka leží v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pod tečnou, neboť implicitně určená funkce je v bodě $x = \frac{\pi-1}{2}$ konkávní (druhá derivace v daném bodě je záporná).

Příklad 7.14. K rovnici $-x^2 + y^2 - 2xy + y = 0$ najděte body, v nichž jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci 7.2 a které jsou stacionárními body takto implicitně definovaných funkcí jedné proměnné. Rozhodněte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.

Řešení. Označme $F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y$. Hledáme body, které vyhovují rovnici $F(x_0, y_0) = 0$ a platí pro ně $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Potom z věty 7.2 vyplývá, že v okolí každého takového bodu je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena jediná implicitní funkce $y = f(x)$. Dále požadujeme, aby x_0 byl stacionárním bodem této funkce, tedy aby

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x(x_0, y_0) = 0.$$

Hledané body získáme vyřešením soustavy rovnic $F(x, y) = 0$ a $F_x(x, y) = 0$. V našem případě tedy

$$F(x, y) = -x^2 + y^2 - 2xy + y = 0 \quad \text{a} \quad F_x(x, y) = -2x - 2y = 0.$$

Z druhé rovnice máme $y = -x$. Dosazením $y = -x$ do první rovnice dostáváme $x(2x-1) = 0$ a odtud $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, y_1 = 0, y_2 = -\frac{1}{2}$. Máme dva stacionární body: $P = [0, 0], Q = [\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$. Nyní musíme ověřit, zda v těchto bodech platí $F_y(x, y) \neq 0$. Spočteme $F_y(x, y) = 2y - 2x + 1$ a dosadíme body P, Q , tj.

$$F_y(P) = 1 \neq 0, \quad F_y(Q) = 3 \neq 0.$$

Jak v okolí bodu P , tak v okolí bodu Q je rovnicí $F(x, y) = 0$ určena implicitně funkce jedné proměnné $f_1(x)$, resp. $f_2(x)$.

Abychom mohli extrémy v nalezených bodech určit, musíme spočítat druhé derivace implicitně dané funkce. Derivace spočteme pomocí věty 7.4, tj. Derivujeme zadanou rovnici podruhé podle x ,

$$((1 - 2x + 2y)y' = 2x + 2y)' \Rightarrow (-2 + 2y')y' + (1 - 2x + 2y)y'' = 2 + 2y'.$$

Odtud

$$y'' = \frac{2 + 4y' - 2(y')^2}{1 - 2x + 2y}.$$

Postupně dosadíme stacionární body P, Q do y'' :

$$f_1''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{minimum,}$$

$$f_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -2 < 0 \Rightarrow \text{maximum.}$$

Funkce $f_1(x)$ má v bodě 0 lokální minimum a funkce $f_2(x)$ má v bodě $\frac{1}{2}$ lokální maximum.

Příklad 7.15. Ověřte, že rovnice $\ln x^2 z^3 = e^{z \cos y} - 1$ zadává v okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$. Vypočítejte její parciální derivace prvního řádu a určete jejich hodnotu v daném bodě $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$.

Řešení. Pro $F(x, y, z) = \ln x^2 z^3 - e^{z \cos y} + 1$ a bod $[x_0, y_0, z_0] = [-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 7.6. Platí

$$F\left(-1, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \ln 1 - e^0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0.$$

Dále

$$F_z(x, y, z) = \frac{3}{z} - e^{z \cos y} \cos y \Rightarrow F_z\left(-1, \frac{\pi}{2}, 1\right) = 3 \neq 0.$$

Rovnicí $\ln x^2 z^3 - e^{z \cos y} + 1 = 0$ je v okolí bodu $[-1, \frac{\pi}{2}, 1]$ implicitně zadána funkce $z = f(x, y)$ taková, že $f(-1, \frac{\pi}{2}) = 1$. Parciální derivace z_x, z_y vypočteme ze vzorce (7.2), tj.

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{z} - e^{z \cos y} \cos y} \Rightarrow z_x\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{e^{z \cos y} z \sin y}{\frac{3}{z} - e^{z \cos y} \cos y} \Rightarrow z_y\left(-1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Totéž můžeme spočítat i jiným způsobem. Budeme hledat z_x, z_y podle níže popsaného postupu. Nejdříve spočteme z_x , tj. v rovnici $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat y jako konstantu a z bude funkcí x, y . Rovnici zderivujeme podle x a vyjádříme derivaci z_x . Tentýž postup platí i pro určení derivace z_y jen s tím rozdílem, že v rovnici $F(x, y, z) = 0$ budeme uvažovat proměnnou x jako konstantu a rovnici derivujeme podle y .

$$(\ln x^2 z^3)_x = (e^{z \cos y} - 1)_x \Rightarrow \frac{2xz^3}{x^2 z^3} + \frac{3x^2 z^2 z_x}{x^2 z^3} = e^{z \cos y} z_x \cos y.$$

Odtud vyjádříme z_x ,

$$z_x = \frac{\frac{2}{x}}{e^{z \cos y} - \frac{3}{z}}.$$

$$(\ln x^2 z^3)_y = (e^{z \cos y} - 1)_y \Rightarrow \frac{3x^2 z^2 z_y}{x^2 z^3} = e^{z \cos y} z_y \cos y - e^{z \cos y} z \sin y.$$

Odtud vyjádříme z_y ,

$$z_y = \frac{-e^{z \cos y} z \sin y}{\frac{3}{z} - e^{z \cos y} \cos y}.$$

Příklad 7.16. Ověřte, že rovnice $z + e^z = xy + 2$ zadává v okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a vypočítejte první a druhé parciální derivace této funkce f v daném bodě.

Řešení. Označme $F(x, y, z) = z + e^z - xy - 2$, $[x_0, y_0, z_0] = [-1, 1, 0]$. Ověříme, zda jsou splněny předpoklady věty 7.6. Je $F(-1, 1, 0) = 0 + e^0 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$. Dále

$$F_z(x, y, z) = 1 + e^z \Rightarrow F_z(-1, 1, 0) = 2 \neq 0.$$

Předpoklady věty 7.6 jsou splněny a rovnice $z + e^z - xy - 2$ v okolí bodu $[-1, 1, 0]$ implicitně zadává právě jednu funkci $z = f(x, y)$ pro niž platí $f(-1, 1) = 0$. Protože funkce F má spojité parciální derivace libovolného řádu, platí totéž podle věty 7.7 i pro funkci f . Nejdříve budeme počítat parciální derivace prvního řádu, tj. z_x, z_y , podle vzorce (7.2). Tedy

$$z_x(-1, 1) = f_x(-1, 1) = -\frac{F_x}{F_z} \Big|_{[-1, 1, 0]} = -\frac{-y}{1 + e^z} \Big|_{[-1, 1, 0]} = \frac{1}{2}.$$

$$z_y(-1, 1) = f_y(-1, 1) = -\frac{F_y}{F_z} \Big|_{[-1, 1, 0]} = -\frac{-x}{1 + e^z} \Big|_{[-1, 1, 0]} = -\frac{1}{2}.$$

Alternativně můžeme první derivaci podle x resp. y spočítat derivací rovnice $F(x, y, z) = 0$ podle x resp. y . Při derivaci rovnice podle x uvažujeme, že z je funkce dvou proměnných x, y a y považujeme za konstantu, tj.

$$(z + e^z)_x = (xy + 2)_x \Rightarrow z_x + e^z z_x = y \Rightarrow z_x = \frac{y}{1 + e^z},$$

dosadíme bod $[-1, 1]$ a máme $z_x(-1, 1) = \frac{1}{2}$. Stejný postup platí pro derivaci rovnice podle y s tím rozdílem, že nyní za konstantu budeme uvažovat proměnnou x , tj.

$$(z + e^z)_y = (xy + 2)_y \Rightarrow z_y + e^z z_y = x \Rightarrow z_y = \frac{x}{1 + e^z}$$

a v bodě $[-1, 1]$ dostáváme hodnotu $z_y(-1, 1) = -\frac{1}{2}$.

Nyní zbývá spočítat druhé derivace, tedy z_{xx} , z_{xy} a z_{yy} . Podle věty 7.7 k jejich výpočtu využijeme již spočtené první derivace a budeme je derivovat ještě jednou buď podle x nebo podle y . Mějme na paměti, že uvažujeme z jako funkci dvou proměnných x, y . Při derivaci podle x vystupuje y jako konstanta a obráceně. Nejdříve vypočítáme derivaci z_{xx} , tj. derivujeme z_x podle x ,

$$(z_x + e^z z_x)_x = y_x \Rightarrow z_{xx} + e^z (z_x)^2 + e^z z_{xx} = 0 \Rightarrow z_{xx} = -\frac{e^z (z_x)^2}{1 + e^z}.$$

Hodnota z_{xx} v bodě $[-1, 1]$ je $z_{xx}(-1, 1) = -\frac{1}{8}$.

Dále počítáme derivaci z_{xy} , tj. derivujeme z_x podle y ,

$$(z_x + e^z z_x)_y = y_y \Rightarrow z_{xy} + e^z z_y z_x + e^z z_{xy} = 1 \Rightarrow z_{xy} = \frac{1 - e^z z_y z_x}{1 + e^z}.$$

Hodnota z_{xy} v bodě $[-1, 1]$ je $z_{xy}(-1, 1) = \frac{5}{8}$.

Zbývá spočítat derivaci z_{yy} , tj. derivujeme z_y podle y ,

$$(z_y + e^z z_y)_y = x_y \Rightarrow z_{yy} + e^z (z_y)^2 + e^z z_{yy} = 0 \Rightarrow z_{yy} = -\frac{e^z (z_y)^2}{1 + e^z}.$$

Hodnota z_{yy} v bodě $[-1, 1]$ je $z_{yy}(-1, 1) = -\frac{1}{8}$.

S ohledem na Schwarzovu větu není potřeba počítat derivaci z_{yx} .

Jelikož jsme spočetli první i druhé parciální derivace, můžeme funkci $z = f(x, y)$ nahradit Taylorovým polynomem druhého řádu se středem v bodě $[x_0, y_0] = [-1, 1]$. Taylorův polynom $T_2(x, y)$ má tvar

$$T_2(x, y) = f(-1, 1) + f_x(-1, 1)(x - 1) + f_y(-1, 1)(y - 1) + \\ + \frac{1}{2}[f_{xx}(-1, 1)(x - 1)^2 + 2f_{xy}(-1, 1)(x - 1)(y - 1) + f_{yy}(-1, 1)(y - 1)^2],$$

tudíž

$$T_2(x, y) = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}(y - 1) + \\ + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{8}(x + 1)^2 + \frac{5}{4}(x + 1)(y - 1) - \frac{1}{8}(y - 1)^2 \right].$$



Příklad 7.17. Ověřte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20$ zadává v okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně jedinou funkci $z = f(x, y)$, a najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v tomto bodě.

Řešení. Pro funkci $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20$ a $[x_0, y_0, z_0] = [1, 2, 3]$ ověříme předpoklady věty 7.6. Platí $F(1, 2, 3) = 1 + 4 + 9 + 6 - 20 = 0$. Dále

$$F_z(x, y, z) = 2z + xy \quad \Rightarrow \quad F_z(1, 2, 3) = 8 \neq 0.$$

Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20 = 0$ v okolí bodu $[1, 2, 3]$ implicitně zadává právě jednu funkci $z = f(x, y)$ takovou, že $f(1, 2) = 3$. Rovnice tečné roviny k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ má tvar

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Určíme parciální derivace funkce z derivováním funkce $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 20$ podle x , y a podle z pomocí vztahu (7.2), tj.

$$z_x = f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{2x + yz}{2z + xy}, \quad z_y = f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2y + xz}{2z + xy}.$$

Hodnoty parciálních derivací v bodě $[1, 2]$ tedy jsou

$$z_x(1, 2) = f_x(1, 2) = -\frac{2x + yz}{2z + xy} \Big|_{[1,2,3]} = -1,$$

$$z_y(1, 2) = f_y(1, 2) = -\frac{2y + xz}{2z + xy} \Big|_{[1,2,3]} = -\frac{7}{8}.$$

Vypočtené hodnoty derivací v bodě $[1, 2]$ dosadíme do vzorce pro tečnou rovinu a získáváme

$$z - 3 = -(x - 1) - \frac{7}{8}(y - 2),$$

po úpravě

$$x + \frac{7}{8}y + z - \frac{23}{4} = 0.$$

Řešení: Pro nalezení tečny využijeme větu 5.3.3. Vypočítejme nejdříve obě parciální derivace funkce $F(x, y) = xy + \ln y - 1$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) &= y \Big|_{[1,1]} = 1, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) &= x + \frac{1}{y} \Big|_{[1,1]} = 2.\end{aligned}$$

Dosadíme,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \Rightarrow 1(x - 1) + 2(y - 1) = 0,$$

rovnice tečny pak bude mít tvar

$$t: \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Pro určení rovnice normály dosadíme do

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \Rightarrow 2(x - 1) - 1(y - 1) = 0,$$

rovnice normály pak bude mít tvar

$$n: \quad 2x - y - 1 = 0.$$

Příklad 5.3.6. Nalezněte rovnici tečné roviny v bodě $[1, -2, 4]$ ke grafu implicitní funkce $z = f(x, y)$ určené rovnicí

$$x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0.$$

Řešení: Pro nalezení rovnice tečny využijeme vetu 5.3.6. Nejdříve určíme hodnoty jednotlivých parciálních derivací funkce

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7$$

v bodě $[1, -2, 4]$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(1, -2, 4) &= 2x + 2 \Big|_{[1,-2,4]} = 4, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(1, -2, 4) &= 6y - 12 \Big|_{[1,-2,4]} = -24, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(1, -2, 4) &= -8z + 8 \Big|_{[1,-2,4]} = -24.\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) &= 0 \\ \Rightarrow 4(x - 1) - 24(y + 2) - 24(z - 4) = 0 &\Rightarrow 4x - 24y - 24z + 44 = 0. \end{aligned}$$

Rovnice tečné roviny pak bude

$$\tau: x - 6y - 6z + 11 = 0.$$

L

Úlohy k samostatnému řešení



- Vypočtete derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $x^2 + y^2 + y^3 - xy = 3$.
- Vypočtete derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $\cot(3y) = x^2y$.
- Vypočtete derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $2^{xy} - 3^{x+y} = 4$ v bodě $A = [1, 2]$.
- Vypočtete derivace y' , y'' implicitní funkce y dané rovnicí $\sin^2(xy) = 0$ v bodě $[1, \pi]$.
- Vypočtete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\frac{x+2y+3z}{y+z} = x$.
- Určete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $e^{x^2y+2y^2z+3xz^2} = 4$.
- Vypočtete parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A = [\frac{\pi^2}{8}, 5, 0]$ dané rovnicí $\cos \sqrt{2x} + y^2z^3 + 2y = z$.
- Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce y zadané implicitně rovnicí $\frac{x+y}{x-y} = 2$ v bodě $A = [3, 1]$.
- Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\sqrt{xy} - z + \ln(x^2 + y^2) = 0$ v bodě $[2, 2, ?]$.
- Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\ln(\cos(x^2 + y^2 + z^2)) = 5x + 3yz + 6z$ v bodě $A = [0, 0, 0]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení



- $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 3y^2 - x$, $y' = \frac{y-2x}{2y+3y^2-x}$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad 1 : Najděte řešení soustavy rovnic a spočtěte determinant soustavy.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 1 \\ 2x - 2y + 3z - 3t = -5 \\ x + y + z + t = 5 \\ 4x + 3y - 5z + 2t = 3 \end{cases} \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[0, 1]$;

$$f(x, y) = \sqrt{y + \sin x}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\sin(xy) + \cos(xy) = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π . (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = x^4 y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 1}} \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (A)

LS 1997-98

Příklad A1 : Gaussovou eliminací obdržíme řešení $x = -3$, $y = 13$, $z = 2$, $t = -7$.
Spočtěme determinant

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -9 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 58. \end{aligned}$$

Příklad A2 : Funkce f je definována na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sin x + y \geq 0\}$. V bodech, kde $y + \sin x > 0$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{2}(y + \sin x)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

V bodech kde $y + \sin x = 0$ nemůže parciální derivace f podle y existovat. Parciální derivace podle x může existovat jen v bodech tvaru $[3\pi/2 + 2k\pi, 1], k \in \mathbb{Z}$. Zkusme počítat podle definice

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(3\pi/2 + 2k\pi, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(3\pi/2 + 2k\pi + t, 1) - f(3\pi/2 + 2k\pi, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin(3\pi/2 + 2k\pi + t)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos t}}{t}.\end{aligned}$$

Poslední limita neexistuje protože limita zleva $(-1/\sqrt{2})$ se nerovná limitě zprava $(1/\sqrt{2})$. Parciální derivace funkce f existují pouze na vnitřku množiny M a jsou tam spojité. Proto v bodě $[0, 1]$ existuje totální diferenciál, a tedy tečná rovina, která má tvar

$$z = 1 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot (y - 1).$$

Příklad A3 : Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na \mathbb{R}^2 a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbb{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned}\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) &= 1, \\ \cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) &= 0, \\ -\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) & \\ -\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) &= 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0, y]$; $y \in (-2, 2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \quad H_2 = \{[-1, y] \in \mathbb{R}^2; y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 + y^4 = 16, \\ (2) \quad & 4x^3y = \lambda 4x^3, \\ (3) \quad & x^4 = \lambda 4y^3. \end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2 . Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1, y) = y, \quad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \quad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnotu matice A a rozhodněte, zda platí $\det A = 0$;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = 2x + 4y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 3x + 2}{(x+1)(x^2+x+1)} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (B)

LS 1997-98

Příklad B1 : Převedme matici A pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitou matici:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & -8 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & -11 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 8 & -103 & -134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 41 & 54 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & -2 & 36 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & 63 & 83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Matice A má hodnost 5, a je tedy regulární. Proto platí $\det A \neq 0$.

Příklad B2 : Funkce f je definována na \mathbb{R}^2 . V bodech, kde $y^2 \neq x^2$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\operatorname{sgn}(x^2 - y^2) \cdot 2y.$$

V bodech, kde $y^2 = x^2$, zkusme počítat parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y) - f(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|(x+t)^2 - y^2|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|2xt + t^2|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{t} |2x + t|. \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, jen když $x = 0$, a je rovna nule. Vzhledem k symetrii funkce f ($f(x, y) = f(y, x)$) totéž platí pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = 3 - 2 \cdot (x - 1) + 4 \cdot (y - 2).$$

┌ **Příklad B3 :** Položme

$$F(x, y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce F je definována na \mathbb{R}^2 a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 8x^3y + 3x^2 + y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 2x^4 + 3y^2 + x.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbb{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned}2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 &= 0, \\ 8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) &= 0, \\ 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) \\ + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) &= 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4, \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M . Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned}H_1 &= \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0, y > 0\}, \\ H_2 &= \{[0, y] \in \mathbb{R}^2; y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x, 0] \in \mathbb{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle\}.\end{aligned}$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy \mathcal{C}^1 na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \quad x > 0, y > 0.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned}(1) \quad & \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \\ (2) \quad & 2 = \lambda \frac{1}{4}x^{-3/4}, \\ (3) \quad & 4 = \lambda \frac{1}{4}y^{-3/4}.\end{aligned}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A .

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\log\left(\frac{x}{y}\right)}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2) \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 - 19x + 16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (C)

LS 1997-98

Příklad C1 : Platí

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 29.$$

Příklad C2 : Funkce f je definována na množině $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\} \cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < 0, y < 0\}$. V bodech $[x, y] \in \mathcal{D}(f)$, kde $x \neq y$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3} \left(\log \frac{x}{y} \right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{3} \left(\log \frac{x}{y} \right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{y}$$

V bodech z definičního oboru, kde $y = x$, zkusme počítat parciální derivace podle definice

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, x) - f(x, x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\log \left(\frac{x+t}{x} \right)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\log \left(1 + \frac{t}{x} \right)}{\frac{t}{x}} \cdot \frac{t}{t^3}} = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x > 0, \\ -\infty & \text{pro } x < 0; \end{cases} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(y, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(y, y+t) - f(y, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\log \left(\frac{y}{y+t} \right)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -\sqrt[3]{\frac{\log \left(1 + \frac{t}{y} \right)}{\frac{t}{y}} \cdot \frac{t}{t^3}} = \begin{cases} -\infty & \text{pro } y > 0, \\ +\infty & \text{pro } y < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -\sqrt[3]{\log 2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(\log 2)^{2/3}} \cdot (x-1) - \frac{1}{6} \frac{1}{(\log 2)^{2/3}} \cdot (y-2).$$

Příklad C3 : Položme

$$F(x, y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$

Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbb{R}^2$) obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy) \cdot y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy) \cdot x) + 1.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje

v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy C^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} & \log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) = 0, \\ & \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))) + \varphi'(x) = 0, \\ & \frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ & \quad + \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\ & \quad - \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))) + \varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -2$.

Příklad C4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x, y, 1) = f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 0), \quad [x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \quad z \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujme extrémů g na množině $H = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Pro každé $[x, y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 1, \\ (2) \quad & 2x + y = \lambda 2x, \\ (3) \quad & x + 2y = \lambda 2y. \end{aligned}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3 - 2\lambda)(x + y) = 0.$$

To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1], [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A .

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \min\{x^2 + y^2, 2 - x^2 - y^2\}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = xy + yz \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16. \end{aligned}$$

Příklad E2 : Funkce f je definována na \mathbb{R}^2 . Pro funkci f platí:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{pro } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 2 - x^2 - y^2 & \text{pro } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

V bodech $[x, y]$, kde $x^2 + y^2 \neq 1$, můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x^2 + y^2 < 1; \\ -2x & \text{pro } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{pro } x^2 + y^2 < 1; \\ -2y & \text{pro } x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$$

Zbývá vyšetřit parciální derivace v bodech, kde $x^2 + y^2 = 1$. Uvažujme bod $[x_0, y_0]$ takový, že $x_0^2 + y_0^2 = 1$. Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\min\{(x_0 + t)^2 + y_0^2, 2 - (x_0 + t)^2 - y_0^2\} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\min\{1 + 2x_0t + t^2, 1 - 2x_0t - t^2\} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\min\{2x_0t + t^2, -2x_0t - t^2\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} -|2x_0t + t^2|/t = \begin{cases} 0 & \text{pro } x_0 = 0 \\ \text{neexistuje} & \text{pro } x_0 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vzhledem k symetrii funkce f lze parciální derivaci podle y počítat analogicky. Z výše uvedeného vyplývá, že

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y]; x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\},$$

$$\mathcal{D}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y]; x^2 + y^2 = 1, y \neq 0\}.$$

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = -3 - 2 \cdot (x - 1) - 4 \cdot (y - 2).$$

Příklad E3 : Položme

$$F(x, y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, která obsahuje bod $[1, 1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1, 1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepíšeme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x} \right)^2 + e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2} \right) \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right)^2 \\ + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2} \right) - 2\varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = 1. \end{array}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z), (1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{array}{ll} (1) & y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \\ (2) & x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \\ (3) & y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ (4) & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) & x + y + z = 1. \end{array}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^4. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = z + e^{xy} \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2 + 5x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 4)} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 17 & 4 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 11 & 26 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 12 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & -17 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Platí tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & 3 & 4 \\ -7 & -17 & -4 & -6 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Příklad G2 : Funkce f je definována na \mathbb{R}^2 . V bodech $[x, y] \neq [0, 0]$ můžeme počítat derivaci „podle vzorečků“:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^3 \cdot \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4(\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2 + y^2}))^3 \cdot \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

V bodě $[0, 0]$ spočítáme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{arctg}(\sqrt{t^2}))^4}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg}(|t|)}{|t|} \right)^4 \cdot \frac{|t|^4}{t} = 0.$$

Vzhledem k symetrii funkce f platí také $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Parciální derivace funkce f jsou v bodě $[1, 2]$ spojité. Proto v bodě $[1, 2]$ existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina, která má tvar

$$z = (\operatorname{arctg} \sqrt{5})^4 + \frac{2}{3}(\operatorname{arctg} \sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x - 1) + \frac{4}{3}(\operatorname{arctg} \sqrt{5})^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (y - 2).$$

Příklad G3 : Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na \mathbb{R}^2 . Pro parciální derivace F platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbb{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy \mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$\begin{aligned}e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) &= 0, \\ e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2 \\ + e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2 \\ - e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\ - 2\varphi''(x) &= 0.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M , takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f , g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= -2z.\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned}(1) \quad & e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \\ (2) \quad & e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \\ (3) \quad & 1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) \quad & x^2 + y^2 - z^2 = 0.\end{aligned}$$

Písenná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnotu matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(x \cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \quad (10 \text{ bodů})$$

|| **Příklad 3 :** Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnotu matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Pokud $x = 2$, pak $h(A) = 3$. V případě, že $x \neq 2$, pak lze číslem $x - 2$ dělit.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{x-1}{x-2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & \frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek je nulový, právě když $\frac{x-1}{x-2} - \frac{6}{5} = 0$, tj. právě když $x = 7$.

Závěr: $h(A) = 2$ pro $x = 7$, $h(A) = 3$ pro $x \neq 7$.

Příklad H2 : Okamžitě vidíme, že $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2$. Pokud $x \neq 0$ lze v bodě $[x, y]$ počítat parciální derivace „podle vzorečků“.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot \cos y & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot \sin y & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \cos(x \cos y) \cdot (-x \sin y) & \text{pro } x > 0, \\ -\sin(x \sin y) \cdot (x \cos y) & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V bodech tvaru $[0, y]$ budeme počítat parciální derivace „z definice“:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y) - f(t, 0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, y)}{t}$$

Tato limita ovšem neexistuje, protože limita zleva ($-\infty$) se nerovná limitě zprava ($\cos y$).

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{t \rightarrow y} \frac{f(0, t) - f(0, y)}{t - y} = \lim_{t \rightarrow y} \frac{0}{t - y} = 0.$$

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité, a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál, a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \cos(\cos 2) \cdot \cos 2 \cdot (x - 1) - \cos(\cos 2) \cdot \sin 2 \cdot (y - 2) + \sin(\cos 2).$$

Příklad H3 : Položme

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{1 - (x + y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - (y + x^2)^2}}.$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci

proměnné x , která je třídy C^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) &= 0, \\ \frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1 - (x + (\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1 - (\varphi(x) + x^2)^2}} &= 0, \\ -\frac{1}{2}(1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x + (\varphi(x))^2)) \cdot (1 + 2\varphi(x)\varphi'(x))^2 \\ &+ (1 - (x + (\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\ -\frac{1}{2}(1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x) + x^2)) \cdot (\varphi'(x) + 2x)^2 \\ &+ (1 - (\varphi(x) + x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x) + 2) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

Příklad H4 : Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin \mathbb{R}^n vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 2x + 1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y) = 2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y) = -2z \end{array}$$

Zkoumejme pro která $[x, y, z] \in M$ jsou vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1, -2y, -2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnota následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnota této matice je menší než 2, právě když $x = -\frac{1}{2}$ nebo $y = z = 0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M .

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad 1 : Řešte soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f , spočtěte její parciální derivace všude kde existují a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y$$

určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M .

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y \quad M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} dx \quad (15 \text{ bodů})$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (I)

LS 1997-98

Příklad I1 : Napišme si rozšířenou matici $(A|b)$ a provedme Gaussovu eliminaci:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Odtud již snadno spočteme: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.

Příklad I2 : Pro definiční obor platí: $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x + y = 1\}$. Pro parciální derivace platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{xy - x - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + y - 1)^2}, \quad [x, y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0, 0]\};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy - x^2 - y}{\sqrt{x^2 + y^2}(x + y - 1)^2}, \quad [x, y] \in \mathcal{D}(f) \setminus \{[0, 0]\}.$$

V bodě $[0, 0]$ počítejme parciální derivace z definice:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{t^2}}{t-1}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|}{(t-1)t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} t}{t-1}.$$

Poslední limita neexistuje, protože limita zleva je rovna 1 a zprava je rovna -1 . To znamená, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ neexistuje. Naprosto stejným postupem lze ukázat, že ani $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ neexistuje.

V bodě $[1, 2]$ jsou obě parciální derivace spojité a proto v tomto bodě existuje totální diferenciál a tedy i tečná rovina. Její rovnice vypadá takto:

$$z = \frac{-3}{4\sqrt{5}} \cdot (x - 1) - \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot (y - 2) + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Příklad I3 : Položme

$$F(x, y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na \mathbb{R}^2 a pro její parciální derivace platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{1 + (y^2 + xy)^2} - e^{xy}y - \sin x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{2y + x}{1 + (y^2 + xy)^2} - e^{xy}x - 1.$$

Obě parciální derivace jsou na \mathbb{R}^2 spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x , která sama je třídy

\mathcal{C}^2 . Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) &= 0, \\ \frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) &= 0, \\ \frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2 \\ + \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} \\ - (\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)} \\ - \cos x - \varphi''(x) &= 0. \end{aligned}$$

└ Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

Příklad I4 : Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém \mathbb{R}^2 a proto musí nabývat maxima i minima na množině M . Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, 0]; x \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_2 &= \{[0, y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x, y]; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Je-li $[x, y] \in H_1$, platí $f(x, y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0, 0]$ a $[1, 0]$. Podobně je tomu na množině H_2 . Tam dostáváme podezřelé body $[0, 0]$ a $[0, 1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3 . Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 1 \\ (2) \quad & \frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \\ (3) \quad & \frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \end{aligned}$$