$$f\left(-\frac{1}{a}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{1}{b}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{1}{b^2}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}.$$

Protože M je kompaktní a funkce f je spojitá, musí nabývat na M svého minima i maxima. Protože podezřelé body jsou pouze dva, v jednom z nich se nabývá maxima a ve druhém minima. Hodnota v bodě $(\frac{1}{a}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{1}{b}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}})$ je kladná, jde tudíž o maximum, hodnota v bodě $(-\frac{1}{a}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{1}{b}\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}})$ je záporná, jde tudíž o minimum.[6] □

Úloha I.95. $f(x,y) = x^2 + y^2$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.96. $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.97. $f(x,y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 25\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.98. $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$ na $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = \frac{\pi}{4}\}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.99. $f(x,y,z) = x - 2y - 2z$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

1a

Řešení metodou multiplikátorů. Rovnici vazby můžeme psát ve tvaru

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Označíme-li $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, lze vazebnou podmínku psát ve tvaru

$$g(x,y,z) = 0,$$

což znamená totéž jako rovnost $M = g^{-1}(0)$. Množina M je tedy uzavřená. Protože je zároveň omezená, neboť $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ určuje sféru se středem v počátku o poloměru 1, je M kompaktní.

Funkce f i funkce g jsou polynomy, jsou tedy nekonečněkrát diferencovatelné, tudíž třídy C^1 na $\mathbb{R}^3$. Jako otevřenou množinu G z věty o multiplikátorech (s jednou vazbou) lze tedy volit $G = \mathbb{R}^3$. Věta o multiplikátorech s jednou vazbou potom říká, že vázaný extrém vzhledem k množině $M = g^{-1}(0)$ může mít funkce f pouze v těch bodech vazby, kde má funkce g nulový gradient nebo v bodech (x,y,z), pro které existuje reálné číslo λ takové, že soustava rovnic o čtyřech neznámých x, y, z, λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

má řešení (x,y,z,λ).

Vyšetřeme nejprve body, kde má vazebná funkce g nulový gradient. Protože

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right),$$

kde

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 2x + 0 + 0 - 0 = 2x,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z^2 - 1\right) = 0 + 2y + 0 - 0 = 2y,$$

[6]) Není těžké ověřit, že obě řešení úlohy dávají de facto stejný výsledek.

1a

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2-1\right) = 0+0+2z-0 = 2z,$$

máme, že

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z).$$

Vektor $(2x, 2y, 2z)$ je nulovým vektorem $(0,0,0)$ pouze v bodě $x=0, y=0, z=0$, který ale není bodem vazby, neboť $g(0,0,0) = 0^2+0^2+0^2-1 = -1 \neq 0$. Tento případ nám tedy nedává žádný podezřelý bod.

Vyšetřeme nyní výše uvedenou soustavu rovnic s multiplikátorem λ.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ g(x,y,z) &= 0 \end{aligned}$$

Parciální derivace vazebné funkce g už jsme vypočetli výše. Parciální derivace funkce f jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x-2y-2z) = 1-0-0 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x-2y-2z) = 0-2-0 = -2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x-2y-2z) = 0-0-2 = -2,$$

zmíněná soustava rovnic má tedy tvar

$$\begin{aligned} 1+\lambda\cdot 2x &= 0 \\ -2+\lambda\cdot 2y &= 0 \\ -2+\lambda\cdot 2z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvních tří rovnic můžeme vyjádřit, že

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = \frac{1}{\lambda}$$

a dosazením do poslední rovnice (vazby) dostaneme, že

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} - 1 = 0,$$

odkud vyplývá, že

$$\lambda^2 = \frac{9}{4} \implies \lambda_{1,2} = \pm\frac{3}{2}.$$

Po dosazení do výrazů pro x, y, z dostáváme dva podezřelé body $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$. Funkční hodnoty v nich jsou

$$f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -3,$$

$$f(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3.$$

Protože funkce f je spojitá a M kompaktní, musí f na M nabývat svého maxima i minima a to v některém ze dvou bodů výše. Zjevně tedy v bodě $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ nabývá minima -3 a v bodě $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ maxima 3. □

Úloha I.100. $f(x,y,z) = x^m y^n z^p$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = a\}$, kde $m, n, p, a > 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.101. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ na $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, kde $a > b > c > 0$.

2) Úlohu můžeme také řešit jednoznačným vyjádřením proměnné y z rovnice vazby $x^2 - y = 0$. Tím získáváme $y = x^2$, které dosadíme do zadané funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$, dostaneme funkci jedné proměnné

$$F(x) = 4 \ln x^2 - x.$$

Zadanou úlohu jsme tedy převedli na úlohu hledání extrémů funkce jedné proměnné. Platí

$$F'(x) = \frac{8}{x} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8.$$

Spočtením druhé derivace $F''(x) = -\frac{8}{x^2}$ a dosazením bodu $x = 8$ získáváme hodnotu $F''(8) = -\frac{1}{8} < 0$. Protože je druhá derivace v bodě $x = 8$ záporná, má funkce F v tomto bodě lokální maximum. Dopočítáme $y = 64$. Odtud funkce $f(x, y) = 4 \ln y - x$ má v bodě $[8, 64]$ vázané lokální maximum.

(15) **Příklad 9.6.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit třemi způsoby.
1) Metoda Lagrangeových multiplikátorů. Vazba je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x, 2y)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že $x = y = 0$. Tyto hodnoty však nevyhovují vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 2x\lambda = 0 \;\Rightarrow\; 2x(1 + \lambda) = 0 \;\Rightarrow x = 0 \;\vee\; \lambda = -1 \\ L_y &= 1 + 2y\lambda = 0 \;\Rightarrow\; 2y\lambda = -1 \;\Rightarrow y = -\frac{1}{2\lambda} \end{aligned}$$

Do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme nejdříve $x = 0$ a dostáváme $y = \pm 1$. Máme tedy stacionární body $x_1^* = [0, 1]$ s příslušnou hodnotou $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $x_2^* = [0, -1]$ s hodnotou $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Dále do rovnice vazby $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ dosadíme za $y = -\frac{1}{2\lambda}$ a $\lambda = -1$. Dostaneme $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Získali jsme další dva stacionární body $x_3^* = [\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$, $x_4^* = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}]$

platí

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle > 0, \tag{9.4}$$

má funkce f v bodě x^* ostré lokální minimum vzhledem k M. Jestliže pro všechna nenulová $h \in \mathbb{R}^n$ splňující podmínku (9.3) platí

$$\langle L''(x^*)h, h\rangle < 0, \tag{9.5}$$

má funkce f v bodě x^* ostré lokální maximum vzhledem k M.

Na základě věty 9.2 a věty 9.3 zformulujeme návod, jak postupovat při hledání vázaných extrémů funkcí se spojitými druhými derivacemi:
1) Zapíšeme vazebné rovnice ve tvaru $g_k(x) = 0$, $k = 1, \ldots, m$ a určíme hodnost matice G.
2) Vytvoříme Lagrangeovu funkci L a určíme stacionární body funkce f vzhledem k M.
3) Spočteme druhou derivaci Lagrangeovy fukce L ve stacionárních bodech.
4) Určíme $h \in \mathbb{R}^n$.
5) Vyšetříme definitnost kvadratické formy $\langle L''(x^*)h, h\rangle$.

9.2 Řešené příklady

1c

Příklad 9.4. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 4x + 3y - 4$ na množině M určené rovností $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Řešení. Úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x, y) = (x-1)^2+(y-2)^2-1 = 0$. Matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) = (2x-2, 2y-4)$ má hodnost 1. Hodnost této matice by byla nulová pouze v případě, že

$$2x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1, \quad 2y - 4 = 0 \;\Rightarrow\; y = 2.$$

Bod $[1, 2]$ však nevyhovuje vazebné podmínce. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, \lambda) = 4x + 3y - 4 + \lambda((x-1)^2 + (y-2)^2 - 1),$$

spočteme její parciální derivace podle proměnných x, y a položíme je rovny nule,

$$L_x = 4 + 2\lambda(x-1) = 0 \;\Rightarrow\; x - 1 = -\frac{2}{\lambda}$$
$$L_y = 3 + 2\lambda(y-2) = 0 \;\Rightarrow\; y - 2 = -\frac{3}{2\lambda}.$$

1c

Dosazením vyjádřených hodnot $x-1$, $y-2$ do rovnice vazby dostáváme

$$\left(-\frac{2}{\lambda}\right)^2+\left(-\frac{3}{2\lambda}\right)^2=1 \quad \Rightarrow \lambda_1=-\frac{5}{2}, \quad \lambda_2=\frac{5}{2}.$$

Pro $\lambda_1=-\frac{5}{2}$ dopočítáme $x_1=\frac{9}{5}$, $y_1=\frac{13}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_1^*=[\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$. Pro $\lambda_2=\frac{5}{2}$ dopočítáme $x_2=\frac{1}{5}$, $y_2=\frac{7}{5}$, dostali jsme tak stacionární bod $x_2^*=[\frac{1}{5},\frac{7}{5}]$.
Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L''=\begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda\end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body a příslušné hodnoty λ:

$$\lambda_1=-\frac{5}{2},\quad L''(x_1^*)=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5\end{pmatrix},\quad \lambda_2=\frac{5}{2},\quad L''(x_2^*)=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h=(h_1,h_2)$ splňující podmínku (9.3). Pro bod $x_1^*=[\frac{9}{5},\frac{13}{5}]$ dostáváme $G(x_1^*)=(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$ a

$$\langle G(x_1^*),h\rangle=\left\langle\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right),(h_1,h_2)\right\rangle=\frac{8}{5}h_1+\frac{6}{5}h_2=0 \quad \Rightarrow \quad h_1=-\frac{3}{4}h_2,$$

tj. $h=\left(-\frac{3}{4}t,t\right)$, $t\in\mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h,h\rangle=\left(-\frac{3}{4}t,t\right)\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t\end{pmatrix}=-\frac{125}{16}t^2<0 \quad \text{pro } t\neq 0.$$

V bodě x_1^* je podle věty 9.3 lokální maximum.
Podobně pro bod $x_2^*=[\frac{1}{5},\frac{7}{5}]$ dostáváme $G(x_2^*)=(-\frac{8}{5},-\frac{6}{5})$ a

$$\langle G(x_2^*),h\rangle=\left\langle\left(-\frac{8}{5},-\frac{6}{5}\right),(h_1,h_2)\right\rangle=-\frac{8}{5}h_1-\frac{6}{5}h_2=0 \quad \Rightarrow \quad h_1=-\frac{3}{4}h_2,$$

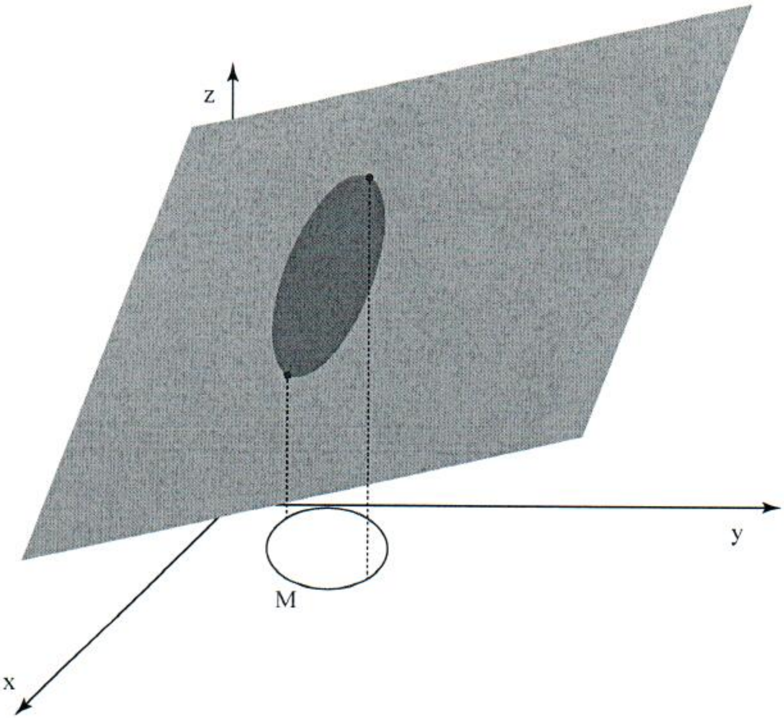
tj. $h=\left(-\frac{3}{4}t,t\right)$, $t\in\mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h,h\rangle=\left(-\frac{3}{4}t,t\right)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}t \\ t\end{pmatrix}=\frac{125}{16}t^2>0 \quad \text{pro } t\neq 0.$$

V bodě x_2^* je podle věty 9.3 lokální minimum.
Vysvětleme si geometrický význam úlohy. Grafem funkce $f(x,y)=4x+3y-4$

1 C

je rovina. Vazebná rovnice $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ je rovnice kružnice se středem v bodě $S=[1,2]$, poloměrem $r=1$ ležící v rovině xy. Hledáme tedy extrémy v bodech kružnice. z-ové souřadnice těchto bodů, tj. funkční hodnoty odpovídající bodům kružnice, leží na křivce, která vznikne průnikem válcové plochy určené touto kružnicí s danou rovinou. Průnikovou křivkou je elipsa. Situace je znázorněna na obrázku 13.



Obrázek 13: Maximum a minimum funkce f na množině M

Příklad 9.5. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=4\ln y-x$ vzhledem k podmínce $x^2=y$.

Řešení. Úlohu vyřešíme dvěma způsoby.
1) Nejdříve úlohu budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x,y)=x^2-y$. Matice $G=(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y})=(2x,-1)$ má hodnost 1. Sestavíme

Parametrizací se vrátíme zpět k proměnným x, y a dostáváme

$$
\begin{aligned}
t_1 = \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_1 = 0, \;\; y = \sin t_1 = 1, \\
&\Rightarrow \quad [0,1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_2 = 0, \;\; y = \sin t_2 = -1, \\
&\Rightarrow \quad [0,-1] \text{ vázané lokální minimum}, \\
t_3 = \frac{\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; y = \sin t_3 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}, \\
t_4 = \frac{5\pi}{6} \quad &\Rightarrow \quad x = \cos t_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \;\; y = \sin t_4 = \frac{1}{2}, \\
&\Rightarrow \quad \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ vázané lokální maximum}.
\end{aligned}
$$

(1d) **Příklad 9.7.** Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x - y + 3z$ na množině určené rovnicí $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$.

Řešení. Příklad budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbou $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0$. Hodnost matice $G = (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}) = (2x, 2y, 8z)$ je různá od 1 pouze v nulovém bodě, který však nevyhovuje vazebné podmínce. Píšeme Lagrangeovu funkci

$$L(x,y,z,\lambda) = x - y + 3z + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$
\begin{aligned}
L_x &= 1 + 2x\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2\lambda} \\
L_y &= -1 + 2y\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2\lambda} \\
L_z &= 3 + 8z\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{3}{8\lambda}.
\end{aligned}
$$

Vyjádřené x, y, z dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ a dostáváme $\lambda = \pm\frac{\sqrt{17}}{8}$, tj. $\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}$. Tomu odpovídají stacionární body

1d $x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$, $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$. Vyjádříme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do L'' stacionární body x_1^*, x_2^* a jim příslušnou hodnotu λ_1, resp. λ_2:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{17}}{8}, \quad L''(x_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{17}}{8}, \quad L''(x_2^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme $h = (h_1, h_2, h_3)$ splňující podmínku (9.3).
Pro bod $x_1^* = [-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{3}{\sqrt{17}}]$ dostáváme $G(x_1^*) = (-\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{24}{\sqrt{17}})$ a

$$\langle G(x_1^*), h\rangle = -\frac{8}{\sqrt{17}}h_1 + \frac{8}{\sqrt{17}}h_2 - \frac{24}{\sqrt{17}}h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + 3h_3,$$

tj. $h = (t, t+3p, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_1^*)h, h\rangle = (t, t+3p, p) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t+3p \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{17}\,t^2 + \frac{13}{4}\sqrt{17}\,p^2 + \frac{3}{2}\sqrt{17}\,pt.$$

To je kvadratická forma kladně definitní, takže v bodě x_1^* nastává ostré lokální minimum.
Pro bod $x_2^* = [\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}]$ dostáváme $G(x_2^*) = (\frac{8}{\sqrt{17}}, -\frac{8}{\sqrt{17}}, \frac{24}{\sqrt{17}})$ a

$$\langle G(x_2^*), h\rangle = \frac{8}{\sqrt{17}}h_1 - \frac{8}{\sqrt{17}}h_2 + \frac{24}{\sqrt{17}}h_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_1 + 3h_3,$$

tj. $h = (t, t+3p, p)$, $t, p \in \mathbb{R}$. Tedy

$$\langle L''(x_2^*)h, h\rangle = (t, t+3p, p)\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{17}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{17} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t+3p \\ p \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{17}\,t^2 - \frac{13}{4}\sqrt{17}\,p^2 - \frac{3}{2}\sqrt{17}\,pt.$$

To je kvadratická forma negativně definitní, takže v bodě x_2^* nastává ostré lokální maximum.

1e

Příklad 9.8. Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině určené rovnicemi $x - y + z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Příklad vyřešíme dvěma způsoby.
1) Nejprve budeme úlohu řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů s vazbami $g_1(x, y, z) = x - y + z - 1 = 0$, $g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Matice $G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ má hodnost 2. Matice nabývá hodnosti 1 pro $x = y = 0$, ale tyto hodnoty nesplňují vazební podmínku g_2. Sestavíme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + 2y + 3z + \lambda_1(x - y + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1).$$

Spočteme derivace a položíme je rovny nule,

$$L_x = 1 + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{1+\lambda_1}{2\lambda_2}$$
$$L_y = 2 - \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{\lambda_1 - 2}{2\lambda_2}$$
$$L_z = 3 + \lambda_1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -3.$$

Do vyjádřených x a y dosadíme hodnotu $\lambda_1 = -3$ a získáváme, že $x = \frac{1}{\lambda_2}$, $y = -\frac{5}{2\lambda_2}$. Takto vyjádřené x, y dosadíme do rovnice vazby $x^2 + y^2 = 1$ a dostáváme $\lambda_2 = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, tj. $\lambda_{21} = \frac{\sqrt{29}}{2}$, $\lambda_{22} = -\frac{\sqrt{29}}{2}$. Stacionární body jsou $x_1^* = [\frac{2}{\sqrt{29}}, -\frac{5}{\sqrt{29}}, 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}]$, $x_2^* = [-\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}}, 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}]$. Sestavíme matici druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce L:

$$L'' = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1f)

Příklad 13. Zjistěte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ vzhledem k množině vymezené rovnicí $2x + 6y = 20$.

Řešení. Rovnice $2x + 6y = 20$ je vazební podmínkou, převedeme ji tedy do tvaru $g(x,y) = 0$. Dostaneme

$$2x + 6y - 20 = 0.$$

Nyní vypočítáme gradienty f a g

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \quad \text{a} \quad \nabla g(x,y) = (2{,}6).$$

V dalším kroku musíme najít bod $[x_0, y_0]$ pro který platí

$$(2x_0, 2y_0) = \lambda \cdot (2{,}6),$$

tedy

$$2x_0 = \lambda \cdot 2 \quad \text{a} \quad 2y_0 = \lambda \cdot 6.$$

Z první rovnice vyjádříme λ, konkrétně $\lambda = x_0$, dosadíme do druhé rovnice a upravíme.

$$\begin{aligned} 2y_0 &= 6x_0 \\ \Rightarrow\ y_0 &= 3x_0 \end{aligned}$$

Navíc musí bod (x_0, y_0) splňovat $g(x_0, y_0) = 0$, proto

$$\begin{aligned} 2x_0 + 18x_0 - 20 &= 0 \\ \Rightarrow x_0 &= 1 \\ \Rightarrow y_0 &= 3. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy jediný podezřelý bod $[1, 3]$.

Podobně bychom mohli nejprve zapsat Lagrangeovu funkci

$$L(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y) = x^2 + y^2 - \lambda \cdot (2x + 6y - 20),$$

zjistit její gradient a položit ho rovný nulovému vektoru $\vec{o}$

$$\nabla L(x,y) = (2x - 2\lambda, 2y - 6\lambda) = (0,0).$$

Opět už pouze stačí dopočítat body $[x_0, y_0]$, pro které je rovnost splněna a pro které zároveň platí $g(x_0, y_0) = 0$. Extrém funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ vzhledem k množině vymezené rovnicí $2x + 6y = 20$ může nastávat pouze v bodě $[1, 3]$.

Víme již tedy jak pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů odhalit body, ve kterých může mít funkce vázaný extrém vzhledem k nějaké množině. Těmto bodům říkáme, podobně jako u funkcí jedné proměnné, body podezřelé z extrému, nebo prostě jen podezřelé body. V odborné literatuře se pak častěji setkáme s pojmem stacionární body. Podeřelé jim říkáme z toho důvodu, že ne v každém takovém bodě extrém skutečně nastává. Už dříve, při vyšetřování absolutních a lokálních extrémů funkce dvou proměnných, jsme si řekli, že pro ověření, zda v podezřelém bodě skutečně extrém nastává, můžeme využít matici druhých parciálních derivací. Podobné to bude i zde. Rozdíl ovšem může nastat v tzv. sedlových bodech. V nich sice funkce dvou proměnných nemá extrém vzhledem ke svému definičnímu oboru, ovšem extrém vzhledem k nějaké množině zde nastat může. Například pokud bychom šli z vrcholku jednoho kopce na vrchol druhého přes sedlový bod, právě v tomto bodě bychom byli v nejnižší nadmořské výšce během naší cesty.

Postačující podmínku existence extrému v jistém bodě si odvodíme v následující části.

sféře v $\mathbb{R}^3$, můžeme z rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vypočítat např. z a hledat extrémy funkcí

$$g_\pm(x,y) := f(x,y,\pm\sqrt{1-x^2-y^2}) \quad \text{v kruhu} \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le 1\};$$

lze též přejít ke sférickým souřadnicím, tedy k funkci

$$h(\varphi,\vartheta) := f(\cos\varphi\cos\vartheta, \sin\varphi\cos\vartheta, \sin\vartheta) \quad \text{v intervalu} \quad \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle.$$

Jindy se hodí např. cylindrické nebo jiné křivočaré souřadnice; vždy jde o to, abychom transformací souřadnic získali z f co nejjednodušší funkci.

Právě uvedené poznámky měly naznačit, že při hledání extrémů funkcí na varietách nejsme odkázáni jen na V. 17.3 a že je vhodné pokusit se předem odhadnout, která metoda povede v daném případě k cíli snadněji; protože záleží na specifických vlastnostech příslušné funkce a variety, obecná konkrétnější rada neexistuje. □

Věta 17.3 podává jistou *nutnou* podmínku, kterou musí splňovat každý bod $x \in V$, v němž má $f\,|\,V$ maximum nebo minimum; najdeme-li tedy všechna společná řešení $x = (x_1, \dots, x_q)$ rovnic (50) – (51), budou mezi nalezenými řešeními všechny body, v nichž má $f\,|\,V$ extrém.[7] Čísla λ_i, která se v této souvislosti nazývají **Lagrangeovy neurčité koeficienty**, mají jen pomocný charakter. Není nutné je počítat (i když se tomu někdy nevyhneme); spíše se snažíme co nejrychleji je eliminovat. Protože soustava $(p+q)$ rovnic (50) – (51) je obecně nelineární a rovnice nemusí být dokonce ani algebraické, může být její řešení značně netriviální, ne-li nepřekonatelný problém. □

Uveďme dva příklady vázaných extrémů:

1g

Příklad 17.9. Hledejme extrémy funkce $f(x,y) := x^2 + y^2$ na nulové hladině V funkce

$$F(x,y) := 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4. \tag{52}$$

Geometrický smysl úlohy: Vhodným otočením souřadnicových os bychom se mohli zbavit „smíšeného členu“ $6xy$, což by ihned prozradilo, že $V = F_{-1}(0)$ je elipsa o středu v počátku. Vzhledem k tomu, že $f(x,y)$ je čtverec vzdálenosti bodu (x,y) od počátku, máme zjistit (bez otáčení os), které její body jsou nejméně a nejvíce vzdálené od počátku; tím zároveň určíme délku a polohu jejích poloos.[8]

Ověření předpokladů věty 17.3 nečiní potíže: Protože např. $F(2/\sqrt{5}, 0) = 0$, je $V \neq \emptyset$; funkce f a F jsou třídy C_∞ v $\mathbb{R}^2$ a V je varieta, protože obě derivace

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 10x - 6y, \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -6x + 10y \tag{53}$$

se anulují jen v počátku, který ve V zřejmě neleží.

[7]) Ještě jednou však zdůrazněme, že věta 17.3 existenci extrémů nezaručuje.

[8]) Náš další postup bude samozřejmě na těchto geometrických představách nezávislý.

Jakožto vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení F je množina V uzavřená. Z rovnosti $F(x,y) = 0$ plyne, že $5(x^2+y^2) = 4+6xy \le 4+3(x^2+y^2)$, takže nerovnost $2(x^2+y^2) \le 4$ platí pro všechny body $(x,y) \in V$; to dokazuje, že varieta V je omezená. V je tedy kompaktní a existence minima i maxima množiny $f(V)$ je zaručena.

Podle V. 17.3 máme najít všechny body $(x,y) \in V$, k nimž existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0; \tag{54}$$

tyto rovnice lze po dosazení $\partial f/\partial x = 2x$, $\partial f/\partial y = 2y$ upravit na tvar

$$(5\lambda+1)x = 3\lambda y, \quad (5\lambda+1)y = 3\lambda x. \tag{55}$$

Protože nemůže být $\lambda = 0 = 5\lambda + 1$, je z těchto rovnic patrné, že 1) $xy = 0 \Rightarrow x = y = 0$; 2) $(\lambda = 0) \vee (5\lambda + 1 = 0) \Rightarrow x = y = 0$; protože bod $(0,0)$ ve V neleží, plyne z toho, že všechna čtyři čísla λ, $5\lambda+1$, x, y jsou nenulová.

Dělením první rovnice v (55) druhou z nich získáme rovnost $x/y = y/x$ neboli $y^2 = x^2$ neboli $y = \pm x$. Dosadíme-li $y = x$ (resp. $y = -x$) do rovnice $F(x,y) = 0$, dostaneme rovnici $4x^2 = 4$ (resp. $16x^2 = 4$), která má řešení $x = \pm 1$ (resp. $x = \pm\frac{1}{2}$). Všechny body, v nichž funkce $f\,|\,V$ nabývá minima nebo maxima, leží tedy v množině $\{(1,1),\ (-1,-1),\ (\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$; Lagrangeův koeficient λ nebylo třeba počítat.[9]) Protože $f(1,1) = f(-1,-1) = 2$ a $f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = f(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, nabývá $f\,|\,V$ v prvních dvou bodech svého maxima, v druhých dvou svého minima.

Geometricky to znamená, že elipsa $F(x,y) = 0$ (o středu v počátku) má poloosy délek $\sqrt{2}$ a $1/\sqrt{2}$, přičemž její hlavní osa (procházející body $(1,1)$ a $(-1,-1)$) svírá s osou x úhel $\frac{1}{4}\pi$.

Příklad 17.10. Najděme extrémy funkce $f(x,y,z) := xyz$ na nulové hladině W vektorové funkce $F = (F_1, F_2)$, kde

$$F_1(x,y,z) := x^2+y^2+z^2-4, \quad F_2(x,y,z) := (x-1)^2+y^2-1. \tag{56}$$

Nulová hladina W funkce F je průnik sféry o středu $(0,0,0)$ a poloměru 2 s válcovou plochou, jejíž osa je rovnoběžná s osou z a jejíž průnik s rovinou xy je kružnice o středu $(1,0)$ a poloměru 1. Jak již víme z Př. 16.8, je tato hladina známa pod názvem *Vivianiho křivka*; je kompaktní, protože je průnikem kompaktní množiny $(F_1)_{-1}(0)$ (sféry) s uzavřenou množinou $(F_2)_{-1}(0)$ (válcem).

Zkontrolujme, zdali platí předpoklady věty 17.3: Obě funkce f a F jsou třídy C_∞, v celém $\mathbb{R}^3$, přičemž

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z, \tag{57_1}$$

[9]) Pro čtenáře, kteří jsou občas – třeba ze zvědavosti – ochotni vyslechnout nebo udělat i něco zbytečného: V prvním případě je $\lambda = -1/2$, ve druhém $\lambda = -1/8$.

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$
$$+ e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+ e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

(3a)

= 2a

Příklad E4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1.$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$y = \lambda_1 2x + \lambda_2,$$

(2) $$x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2,$$

(3) $$y = \lambda_1 2z + \lambda_2,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x + y + z = 1.$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0,1,0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x \, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt &= \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}.$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad 1 : Nalezněte matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = (\operatorname{arctg}(\sqrt{x^2+y^2}))^4. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

(2b)

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = z + e^{xy} \qquad M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 = z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (G)

LS 1997-98

Příklad G1 : Standardním postupem obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{\sin xy} \cdot \cos xy \cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\sin x^2} \cdot (\cos x^2 \cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 4x^2$$
$$+ e^{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)} (\cos x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2$$
$$- e^{\sin x\varphi(x)} \sin x\varphi(x) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)} \cos x\varphi(x) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

2b

Příklad G4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce f, g_1 i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{xy}y, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 2x,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^{xy}x, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 2y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 1, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = -2z.$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x,$$

(2) $$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y,$$

(3) $$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z,$$

(4) $$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

(5) $$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x-y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x-y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

(2b) Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x = -y$ nebo $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x = y = 0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \qquad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$

a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \qquad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Příklad G5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Provedeme rozklad integrandu na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x^2+5x+5}{(x+1)(x^2+2x+4)}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{x+1} + \frac{4x+7}{x^2+2x+4}\right)dx \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{3}{x^2+2x+4}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{((x+1)/\sqrt{3})^2+1}\,dx \\
&\overset{c}{=} \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{2}{3}\log(x^2+2x+4) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right), \\
&x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, +\infty).
\end{aligned}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad 1 : Určete hodnost matice A v závislosti na parametru:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, určete kde existují vlastní parciální derivace a spočtěte je; napište rovnici tečné roviny v bodě $[1,2]$;

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x\cos y) & x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2 & x < 0 \end{cases}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2)$$

určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. (10 bodů)

2c

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y^2 + z^2\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (H)

LS 1997-98

Příklad H1 : Pomocí řádkových elementárních úprav, které nemění hodnost matice, dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & x & x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & x-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\arcsin(x+(\varphi(x))^2)+\pi/2-\arccos(\varphi(x)+x^2)=0,$$

$$\frac{1+2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}}+\frac{\varphi'(x)+2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}}=0,$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(x+(\varphi(x))^2))\cdot(1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2&\\
+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x))&\\
-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2(\varphi(x)+x^2))\cdot(\varphi'(x)+2x)^2&\\
+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\varphi''(x)+2)=0.&
\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x=0$ a využijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=-1$ a $\varphi''(0)=-4$.

Příklad H4 : Položme

2c

$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, \qquad g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbb{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2z && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=2x && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=1\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=2y && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)=-2y\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=2x+1 && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y)=2z && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y)=-2z
\end{aligned}$$

Zkoumejme pro která $[x,y,z]\in M$ jsou vektory $(2x,2y,2z)$, $(1,-2y,-2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x=-\frac{1}{2}$ nebo $y=z=0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M.

Nyní řešme soustavu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{1}$$

$$x = y^2 + z^2 \tag{2}$$

(2c)

$$2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \tag{3}$$

$$2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \tag{4}$$

$$2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2 + x - 1 = 0$, tj. $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$x = (\sqrt{5} - 1)/2. \tag{6}$$

Z (4) vyplývá, že buď $y = 0$ nebo $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[(\sqrt{5}-1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\right], \qquad \left[(\sqrt{5}-1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

Příklad H5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+x+1} = x + t$. Pak dostaneme

$$x = \frac{1-t^2}{2t-1}, \qquad dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}\, dt.$$

Je třeba nalézt primitivní funkci

$$\int \frac{\frac{1-t^2}{2t-1} + 1}{\frac{1-t^2}{2t-1} + t} \cdot \frac{-2t^2+2t-2}{(2t-1)^2}\, dt = \int \frac{-2(2t-t^2)}{(2t-1)^2}\, dt$$

Platí

$$\frac{-2(2t-t^2)}{(2t-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{4t+1}{(2t-1)^2}$$

Rozložíme-li druhý výraz na parciální zlomky dostaneme

$$\int \frac{-2(2t-t^2)}{(2t-1)^2}\, dt = \int \frac{1}{2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{3}{(2t-1)^2}\, dt - \frac{1}{2}\int \frac{2}{2t-1}\, dt$$
$$\stackrel{c}{=} \frac{1}{2}t + \frac{3}{8t-4} - \frac{1}{2}\log|2t-1|, \quad t \in (-\infty, 1/2) \text{ nebo } t \in (1/2, +\infty).$$

Podle věty o substituci dostáváme

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\, dx = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+x+1} - x)$$
$$+ \frac{3}{8(\sqrt{x^2+x+1} - x) - 4} - \frac{1}{2}\log|2\sqrt{x^2+x+1} - 2x - 1|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

3a

Příklad A4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y]$; $y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^4 = 16, x > -1\}, \qquad H_2 = \{[-1,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4 + y^4 - 16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad & x^4 + y^4 &= 16,\\
&(2) \qquad & 4x^3y &= \lambda 4x^3,\\
&(3) \qquad & x^4 &= \lambda 4y^3.
\end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$.

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1,y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15}\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

Funkce F je definována na $\mathbb{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= 8x^3y + 3x^2 + y,\\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= 2x^4 + 3y^2 + x.\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbb{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Dále platí $F(1,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,\\ 8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,\\ 24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)\\ +\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

3b

Příklad B4 : Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4, \qquad [x,y] \in \mathbb{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned}H_1 &= \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\},\\ H_2 &= \{[0,y] \in \mathbb{R}^2;\ y \in \langle 0,1\rangle\},\\ H_3 &= \{[x,0] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle 0,1\rangle\}.\end{aligned}$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$

$$2 = \lambda\frac{1}{4}x^{-3/4}, \tag{2}$$

$$4 = \lambda\frac{1}{4}y^{-3/4}. \tag{3}$$

36

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3}+1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3}+1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0,y) = 4y, \qquad y \in \langle 0,1\rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[0,1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x,0) = 2x, \qquad x \in \langle 0,1\rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0,0]$, $[1,0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0,1]$ a minima v bodě $[0,0]$.

Příklad B5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Nyní integrujme jednotlivé parciální zlomky:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x+1}\,dx &\overset{c}{=} \log|x+1|,\\
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4}\\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{((2x+1)/\sqrt{3})^2+1}\\
&\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Dohromady tedy máme

$$\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx \overset{c}{=} \log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))+\varphi(x)=0,$$

$$\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))+\varphi'(x)=0,$$

$$\frac{-1}{(x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x)))^2}\cdot(2x+2\varphi(x)\varphi'(x)-\sin(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x)))^2$$
$$+\frac{1}{x^2+\varphi(x)^2+\cos(x\varphi(x))}\cdot(2+2(\varphi'(x))^2+2\varphi(x)\varphi''(x)$$
$$-\cos(x\varphi(x))(\varphi(x)+x\varphi'(x))^2-\sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x)+x\varphi''(x)))+\varphi''(x)=0.$$

Dosadíme-li $x=0$ a použijeme-li $\varphi(0)=0$, dostaneme $\varphi'(0)=0$ a $\varphi''(0)=-2$.

3C **Příklad C4 :** Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1)=f(x,y,-1)<f(x,y,z)<f(x,y,0),\qquad [x,y,z]\in\mathbb{R}^3,\ z\in(-1,1)\setminus\{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=0\}$ a minima na množině $M\cap\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ z=-1 \text{ nebo } z=1\}$. Položme $g(x,y)=x^2+xy+y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y)=x^2+y^2-1$. Platí $g,h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=2x,\qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=2y.$$

Pro každé $[x,y]\in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y),\frac{\partial h}{\partial y}(x,y))\neq(0,0)$. Řešme následující soustavu

(1) $$x^2+y^2=1,$$
(2) $$2x+y=\lambda 2x,$$
(3) $$x+2y=\lambda 2y.$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3-2\lambda)(x+y)=0.$$

To znamená, že buď $x=-y$ nebo $\lambda=3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x=y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech $[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$ a maxima v bodech $[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]$.

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},-1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},-1],\ [-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},1],\ [1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},1]$$

3c

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], \ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

Příklad C5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Rozložme naši funkci na parciální zlomky:

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{x^2+x+4}.$$

Vyřešením odpovídající soustavy lineárních rovnic dostaneme rozklad

$$\frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)} = \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{5} \cdot \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2x+31}{x^2+x+4}.$$

Integrace prvních dvou parciálních zlomků je snadná. Integrujme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+31}{x^2+x+4}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+4}\,dx + 30 \int \frac{1}{(x+1/2)^2+15/4}\,dx \\ &= \log(x^2+x+4) + 8 \int \frac{1}{\left((2x+1)/\sqrt{15}\right)^2+1}\,dx \\ &\overset{c}{=} \log(x^2+x+4) + 4\sqrt{15}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\end{aligned}$$

Dohromady máme

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+4x^2-19x+16}{(x-2)^2(x^2+x+4)}\,dx \overset{c}{=} -\frac{1}{x-2} + \frac{8}{5}\log|x-2| \\ + \frac{1}{5}\log(x^2+x+4) + \frac{4\sqrt{15}}{5}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{15}}\right)\end{aligned}$$

pro $x \in (-\infty, 2)$ nebo $x \in (2, +\infty)$.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad 1 : Spočtěte determinant matice A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 2 : Určete definiční obor funkce f, spočtěte její parciální derivace všude, kde existují, a napište rovnici tečné roviny v bodě $[1, 2]$;

$$f(x, y) = \min\{x^2 + y^2, 2 - x^2 - y^2\}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3 : Ukažte, že rovnice

$$x^y + y^x = 2y$$

určuje v jistém okolí bodu $[1, 1]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 1. (10 bodů)

3d

Příklad 4 : Nalezněte maximum a minimum funkce f (pokud existují) na množině M.

$$f(x, y, z) = xy + yz \quad M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$$

(15 bodů)

Příklad 5 : Spočtěte

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Řešení písemky z matematiky pro FSV (E)

LS 1997-98

Příklad E1 : Platí:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -8 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -16 & -8 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -16.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x)\log x} + e^{x\log\varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi'(x)\log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x)\log x} \cdot \left(\varphi''(x)\log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\log\varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2 \\ + e^{x\log\varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

3d **Příklad E4 :** Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce g_1, g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y,z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y,z) = 1, \\ &\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y,z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y,z) = 1. \end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z)$, $(1,1,1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} &(1) & y &= \lambda_1 2x + \lambda_2, \\ &(2) & x + z &= \lambda_1 2y + \lambda_2, \\ &(3) & y &= \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ &(4) & x^2 + y^2 + z^2 &= 1, \\ &(5) & x + y + z &= 1. \end{aligned}$$

3d Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$.

V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1-\sqrt{5})/4, 1/2, (1+\sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1+\sqrt{5})/4, 1/2, (1-\sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0,1,0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

Příklad E5 : Funkce, kterou máme integrovat, je definována na $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. My budeme hledat primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Použijeme substituci $\cos x = t$. Dostaneme $-\sin x\, dx = dt$. Nyní je třeba spočítat:

$$\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt.$$

Provedeme rozklad na parciální zlomky, které pak zintegrujeme

$$\begin{aligned}\int \frac{-1}{t+t^3}\, dt &= \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt - \int \frac{1}{t}\, dt \\ &\overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+t^2) - \log|t|, \qquad t \in (-\infty, 0) \text{ nebo } t \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Podle věty o substituci máme:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx \overset{c}{=} \frac{1}{2}\log(1+\cos^2 x) - \log|\cos x|, \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Určitý integrál spočteme pomocí právě vypočtené primitivní funkce a dostaneme

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x + \cos^3 x}\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{5}{2}.$$

3e

Příklad F4 : Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$2x(1-2(x^2+7y^2)) = 0,$$
$$2y(7-(x^2+7y^2)) = 0.$$

Řešením této soustavy jsou body $[0,0]$, $[1/\sqrt{2},0]$, $[-1/\sqrt{2},0]$, $[0,1]$, $[0,-1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 8y.$$

Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x,y]=[0,0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu

(1) $$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x,$$

(2) $$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y,$$

(3) $$x^2 + 4y^2 = 1.$$

Z (1) vyplývá, že $x=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y=0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x=0$, pak podle (3) je $y=\pm 1/2$. Pokud $y=0$, pak podle (3) je $x=\pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1-2(x^2+7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7-(x^2+7y^2)).$$

Odtud plyne $7(x^2+7y^2) = -3$, což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0,0],\ [1/\sqrt{2},0],\ [-1/\sqrt{2},0],\ [0,1/2],\ [0,-1/2],\ [1,0],\ [-1,0].$$

Funkce f nabývá maxima v bodech $[0,1/2]$, $[0,-1/2]$ a minima v bodě $[0,0]$.

(4). kvádr A-H, $A = [0,0,0]$

$G \in M$:

$M = \{[x,y,z] : 4x + 2y + z = 2, \ x,y,z \geq 0\}$

Cíl: max objem

$G = [x_0, y_0, z_0]$

hledáme max $f(x,y,z) = xyz$ (mělo by být $|xyz|$, ale naše $x,y,z \geq 0$)

$$g(x,y,z) = 4x + 2y + z - 2$$

(1) $\nabla g = (4,2,1) \neq 0$ nikdy

(2) $f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = 0$ $\quad xyz + \lambda(4x+2y+z-2) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $yz + 4\lambda = 0$ $\qquad yz - 4xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $xz + 2\lambda = 0$ $\qquad xz - 2xy = 0$

$\frac{\partial}{\partial z}$: $xy + \lambda = 0$ $\rightarrow \lambda = -xy \rightarrow$

navíc $4x + 2y + z = 0$ $\qquad 4x + 2y + z = 0$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -yz + 4xy = 0 \\ 2xz - 4xy = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2xz - yz = 0 \rightarrow z(2x - y) = 0$$

$4x + 2y + z = 0 \qquad 4x + 2y + z = 0 \qquad 4x + 2y + z = 0$

(a) $z = 0$ $\rightarrow$ tam max stejně nebude (místo kvádru by byl obdélník)

$\rightarrow$ (b) $\boxed{y = 2x}$, $4x + 2y + z = 0$

(4)

$\rightarrow \quad 4x + 2\cdot 2x + z = 2$

$\rightarrow \quad \boxed{2 - 8x = z}$ (a máme $y = 2x$)

dosadíme do $\boxed{xz - 2xy = 0}$

$\rightarrow \quad x(2-8x) - 2x \cdot 2x = 0$

$2x - 8x^2 - 4x^2 = 0$

$2x(1-6x) = 0$

$x = 0$ (nebude max)

$\boxed{x = \frac{1}{6}}$ pak $\boxed{y = \frac{1}{3}}$ $z = 2 - \frac{8}{6}$

$\boxed{z = \frac{2}{3}}$

(jen pro formu $\lambda = -xy$ $\lambda = -\frac{1}{18}$).

Max. je v bodě $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

a hodnota je $\frac{2}{2\cdot 3\cdot 9} = \underline{\underline{\frac{1}{27}}}$