

4)

(1a) $M = \{ 1 < x^2 + y^2 < 4 \}$

otvorená



$x, y: 1 < x^2 + y^2 < 4$

$x, y: x^2 + y^2 \in (1, 4)$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

$x, y: [x, y] \in g^{-1}(1, 4)$

g je spojivá

$(1, 4)$ je ot.

M je vzor otvorenej množiny pri spoj. zobrazení
→ M je otvorená

(1b) $x < y < x + 3$

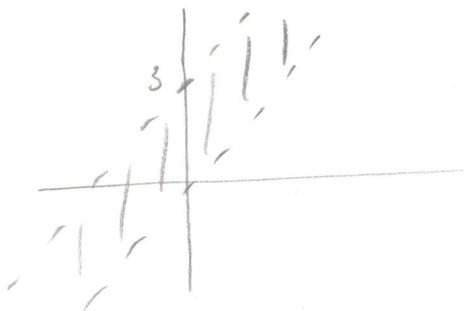
ot.

$0 < y - x < 3$

$g(x, y) = y - x$ spoj.

$g^{-1}([0, 3])$
ot.

vzor ot. pri spoj. zobr → ot.



(1c) $x^2 \leq y \leq x^2 + 1$

uz.

$0 \leq y - x^2 \leq 1$

$g(x, y) = y - x^2$ spoj.

$g^{-1}([0, 1])$
uz.

vzor uz. pri spoj. zobr → uz.



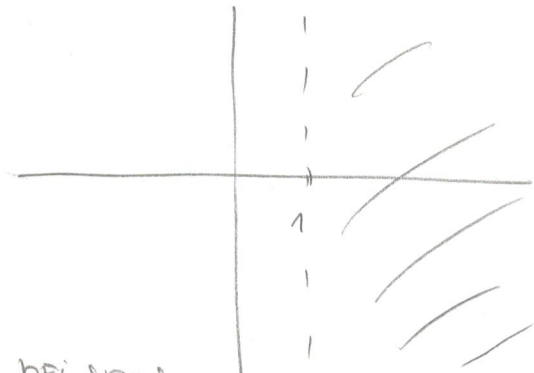
(1d) $|x| > 1$

ot.

$f(x,y) = |x|$ spoj.

$f^{-1}((1, \infty))$
ot.

vzor ot. pri spoj. zobr \rightarrow ot.



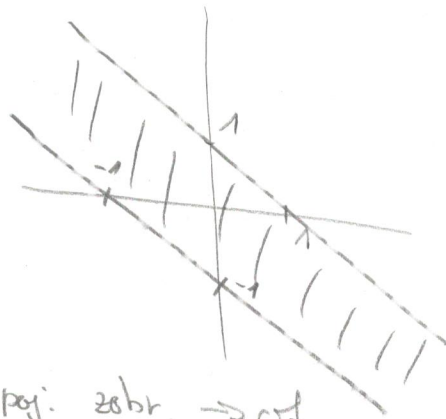
(1e) $|x+y| < 1$

ot.

$g(x,y) = |x+y|$ spoj.

$g^{-1}((-\infty, 1))$
ot.

vzor ot. pri spoj. zobr \rightarrow ot.



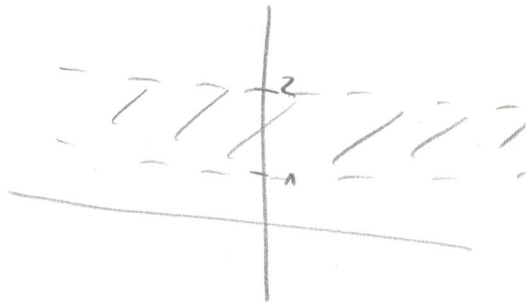
(1f) $\mathbb{R} \times (1,2)$

ot. $1 < y < 2$

$g(x,y) = y$ spoj.

$g^{-1}((1,2))$
ot.

vzor ot. pri spoj. zobr \rightarrow ot.



(1g) $\mathbb{R} \times [1,2]$

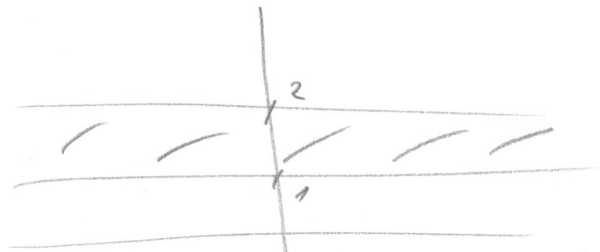
uz.

$1 \leq y \leq 2$

$g(x,y) = y$

$g^{-1}([1,2])$
uz.

vzor uz. pri spoj. zobr \rightarrow uz.



$$(a) M = \{ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

uz. koule o středu $(0,0,0)$, $r=1$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \text{ spoj.}$$



$$M = g^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{uz})$$

vzr uz. při spoj. zobr. \rightarrow uz.

$$(b) M = \{ \underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{M_1} \quad \underbrace{x^2 + z^2 = 1}_{M_2} \}$$

průnik 2 válcových ploch

$$M_1: g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 \text{ spoj.}$$

$$M_1 = g_1^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{uz})$$

\downarrow
uz.

vzr uz. při spoj. zobr. \rightarrow uz.

$$M_2: g_2(x,y,z) = x^2 + z^2 \text{ spoj.}$$

$$M_2 = g_2^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{uz})$$

-||-

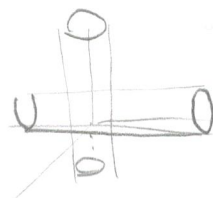
\rightarrow uz

$$M = M_1 \cap M_2$$

průnik 2 uz. je uz.

$$(c) \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{uz.} \quad \underbrace{x^2 + z^2 \leq 1}_{uz.}$$

průnik 2 válců



$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 \text{ spoj.}$$

$$M_1 = g_1^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{uz})$$

vzr uz. při spoj. zobr. \rightarrow uz

$$g_2(x,y,z) = x^2 + z^2 \text{ spoj.}$$

$$M_2 = g_2^{-1}(\underbrace{[0,1]}_{uz})$$

-||-

$$M = M_1 \cap M_2$$

průnik 2 uz \rightarrow uz

$$(d) M = \{ x^2 + y^2 = z \}$$

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

$$M = g^{-1}(\{0\})$$

↓
uz.

uz. rotaci
paraboloid



(jeho hranice, jen ta plocha)

vzor uz. při spoj. zobr. → uz

(e)

$$x^2 + y^2 = 1$$

M_1

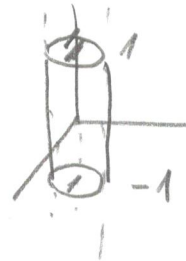
$$|z| \leq 1$$

M_2

válec
- plocha

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 \text{ spoj.}$$

uz.



$$M_1 = g_1^{-1}(\{1\})$$

uz.

vzor uz. při spoj. zobr. → uz.

$$g_2(x, y, z) = |z| \text{ spoj.}$$

$$M_2 = g_2^{-1}([0, 1])$$

uz.

-||-

→ uz

$$M = M_1 \cap M_2 \text{ průnik 2 uz.} \rightarrow \text{uz.}$$

$$(f) M = \{ [t_1, t_1, -t], t \in \mathbb{R} \}$$

průnik 2 uz.

$$M = M_1 \cap M_2$$

$$M_1 = \{ [x, y, z] : x = y \} \text{ rovina}$$

$$g_1(x, y, z) = x - y \text{ spoj.}$$

$$M_1 = g_1^{-1}(\{0\})$$

uz.

} uz.

$$M_2 = \{ [x, y, z] : y = -z \}$$

$$g_2(x, y, z) = y + z \text{ spoj.}$$

$$M_2 = g_2^{-1}(\{0\})$$

} uz

} průnik 2 uz
je uz

Jiní řešení

Věta Množina $M \subset \mathbb{R}^4$ je uz. $\Leftrightarrow \forall$ posloupnost $(x_n) \subset M$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad x \in \mathbb{R}^4 \text{ plati: } x \in M.$$

Tedy zvolme posloupnost (x_n) , $x_n \in M$, $x_n \rightarrow x$ ($x = (x_1, x_2, x_3)$)

Je metrický tvar $\langle x_n, x_n - x_n \rangle$.

Posloupnost (x_n) v \mathbb{R}^4 konverguje po složkách. Tedy

Máme

$$x_n \rightarrow x_1$$

$$x_n \rightarrow x_2$$

$$-x_n \rightarrow x_3$$

Ale posloupnost má nejvýše
1 limitu $\rightarrow x_1 = x_2 = -x_3$

tedy x je tvaru $[x_1, x_1, -x_1]$, tedy $x \in M$.

$\rightarrow M$ je uz.