(3a) $x^2 + (y-1)^2$

Řešení. Podotkněme, že je evidentní, že funkce f je nezáporná a nuly nabývá pouze v bodě $(0, 1)$, kde tedy nabývá globálního minima. Pojďme nicméně vyšetřit existenci extrémů standardním postupem. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad 2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0, 1)$, kde, jak už jsme zmínili funkce zřejmě nabývá globálního minima. Nemusíme tedy vyšetřovat definitnost matice druhého diferenciálu (navíc bychom tak dostali pouze informaci, že jde o lokální minimum). □

(3b) || **Úloha I.64.** $f(x, y) = x^2 - (y-1)^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2(y-1)$$

jsou spojité, tudíž f má v každém bodě totální diferenciál. Jediné body podezřelé z lokálních extrémů jsou tedy stacionární body, tj. body, kde jsou obě parciální derivace nulové. V jiných bodech funkce f nemůže mít extrém. Řešením rovnic

$$2x = 0, \qquad -2(y-1) = 0$$

vidíme, že jediným stacionárním bodem je bod $(0, 1)$. Oproti předchozí úloze není automaticky vidět, zda se v tomto bodě nabývá extrému. Vyšetříme tedy definitnost matice druhého diferenciálu, tj. matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Určeme tedy nejprve druhé parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Matice druhého diferenciálu (v bodě $(0, 1)$) má tedy tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a její hlavní determinanty jsou $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -4 < 0$. Protože druhý hlavní determinant (tedy determinant celé matice) je záporný, je matice druhého diferenciálu indefitní, extrému se tedy v bodě $(0, 1)$ nenabývá. Funkce f tedy v žádném bodě nemá lokální extrém.[5] □

(3f) || **Úloha I.65.** $f(x, y) = (x - y + 1)^2$

Řešení. Je vidět, že funkce f je nezáporná. Ve všech bodech přímky $x - y + 1 = 0$ tedy nabývá globálního minima. Přesvědčíme se, že jiné extrémy funkce f nemá. Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y + 1), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -2(x - y + 1).$$

Je zjevné, že obě parciální derivace jsou nulové právě v bodech zmíněné přímky. V jiných bodech se tedy extrému nenabývá. □

Úloha I.66. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Její parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y - 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y + 1.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2x - y - 2 &= 0 \\ -x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

[5]) Úlohu lze opět řešit i pomocí úvah. Pokud $x \neq 0$, pak malým zvětšením absolutní hodnoty x se funkční hodnota f zvětší, zmenšením zmenší, takže v bodech, kde $x \neq 0$ se nemůže nabývat extrému. Z podobného důvodu nepřichází z hlediska extrému jiná možnost, než $y = 1$. Nicméně ani v bodě $(0, 1)$ se nemůže nabývat extrému. Malým posunem hodnoty y se funkce f dostane do záporných, zatímco malým posunem hodnoty x do kladných hodnot.

1. Posuzujme nejprve body na ose x s výjimkou počátku. Na prstencovém okolí libovolného takového bodu osy x nabývá x^2 nezáporných hodnot a pro $x_0 \neq 6$ je pro dostatečně malé okolí bodu $(x_0, 0)$ hodnota výrazu $(6 - x - y)$ buď stále nekladná nebo stále nezáporná (tímto okolím může být např. dvojinterval $(x_0 - \varepsilon/4, x_0 + \varepsilon/4) \times (-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$, kde $\varepsilon = |x_0 - 6|$). Ovšem na libovolném prstencovém okolí bodu $(x_0, 0)$ nabývá y^3 kladných i záporných hodnot, což implikuje že f nabývá pro $x_0 \neq 0$ a $x_0 \neq 6$ na nějakém okolí bodu $(x_0, 0)$ kladných i záporných hodnot, nemůže tedy mít v tomto bodě lokální extrém, neboť hodnota funkce f je v tomto bodě samozřejmě nula. Je-li $x_0 = 6$, nabývá funkce f kladných hodnot na „úsečce" $\{x_0\} \times (0, 1)$ a záporných na „úsečce" $\{x_0\} \times (-1, 0)$, opět tedy na každém okolí bodu $(6, 0)$ nabývá kladných i záporných hodnot. Ani v bodě $(6, 0)$ tedy není extrém.

2. Podobně nahlédneme, že funkce f nenabývá extrému v počátku, neboť nabývá kladných hodnot na množině $\{0\} \times (0, 1)$ a záporných na množině $\{0\} \times (-1, 0)$.

3. Vyšetřujme nyní extrémy funkce f ve zbylých bodech osy y. Opět, jestliže $y_0 \neq 6$ a $y_0 \neq 0$, potom existuje okolí bodu $(0, y_0)$ takové, že hodnota výrazu $6 - x - y$ je na něm nekladná nebo nezáporná (tímto okolím může být např. dvojinterval $(-\varepsilon/4, +\varepsilon/4) \times (y_0 - \varepsilon/4, y_0 + \varepsilon/4)$, kde $\varepsilon = |y_0 - 6|$). Stejně tak existuje okolí bodu $(0, y_0)$, kde je stále nekladný nebo nezáporný výraz y^3 (poslouží libovolný kroužek, který neprotíná počátek). A protože konečně x^2 je nezáporné číslo na $\mathbb{R}^2$ a průnik dvou okolí je okolí, dostáváme, že existuje okolí bodu $(0, y_0)$, kde funkce f nabývá pouze nekladných nebo nezáporných hodnot.

Navíc o tom, zda jsou tyto hodnoty nekladné nebo nezáporné, rozhoduje zřejmě znaménko výrazu $y^3(6 - x - y)$. Je-li x velmi malé a $y \neq 6$, je znaménko výrazu $(6 - x - y)$ stejné jako znaménko výrazu $(6 - y)$, tedy o znaménku f rozhoduje hodnota výrazu $y^3(6 - y)$, která je samozřejmě kladná pro $y \in (0, 6)$ a záporná jindy. Z předchozích úvah vyplývá, že hodnoty funkce f na nějakém okolí bodu $(0, y_0)$ pro $y_0 \in (0, 6)$ jsou nezáporné, a tedy funkce f má v těchto bodech (neostré) lokální minimum. Naopak, hodnoty funkce f na nějakém okolí bodu $(0, y_0)$ pro $y_0 \in (\infty, 0) \cup (6, +\infty)$ jsou nekladné, a tedy funkce f má v těchto bodech (neostré) lokální maximum.

4. Zbývá vyšetřit poslední bod $(0, 6)$. Funkce f zde lokální extrém nemá. Její hodnota v tomto bodě je nulová, přitom na úsečce $(-1, 0) \times \{6\}$ nabývá f kladných hodnot a na úsečce $(0, 1) \times \{6\}$ záporných hodnot. Na libovolném okolí bodu $(0, 6)$ tedy funkce nabývá hodnot větších i menších, než je hodnota funkce f v bodě $(0, 6)$. □

3d || **Úloha I.68.** $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0. \end{aligned}$$

Krácením trojek, vyjádřením $y = x^2$ z první rovnice a dosazením do druhé dostaneme rovnici

$$x^4 - x = 0,$$

která má vzhledem k rozkladu $x^4 - x = x(x^3 - 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1)$ dvě řešení, $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Těmto dvěma řešením přísluší řešení $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$.
Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

Matice druhého diferenciálu v prvním stacionárním bodě $(1, 1)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = 6 > 0$, $D_2 = 36 - 9 = 27 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a v bodě $(1, 1)$ má tedy funkce f lokální minimum $f(1, 1) = -1$.
Matice druhého diferenciálu ve druhém stacionárním bodě $(0, 0)$ je ovšem

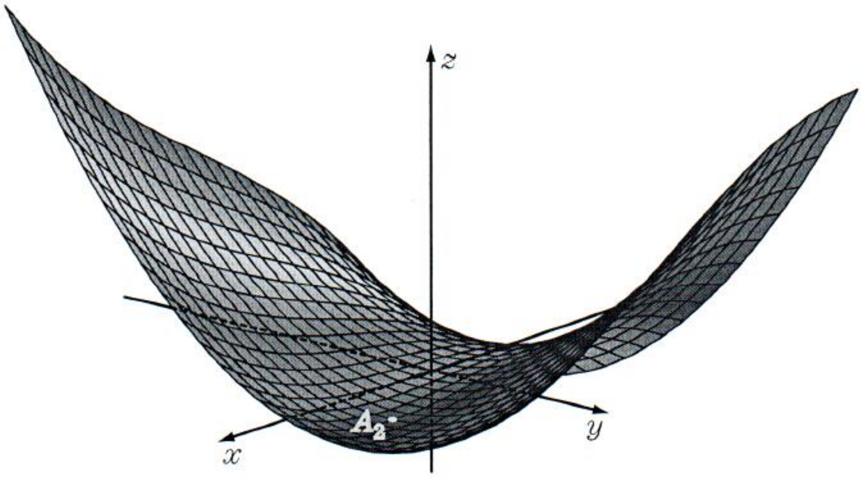
$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

je tedy indefinitní, funkce f v bodě $(0, 0)$ tedy nenabývá extrému. □

Úloha I.69. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Řešení. Funkce f je definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y - 2x.$$



Obr. 6.1.2

(3c)

Příklad 6.1.2. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2).$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}2x = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}4y = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2).$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak rovnice pro stacionární body funkce f,

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$-2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2) = 0.$$

3. Rovnice pro stacionární body vyřešíme. Výraz $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je vždy různý od nuly pro libovolné x, y, můžeme jím proto obě rovnice vykrátit,

$$x(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$y(2y^2+x^2-2) = 0.$$

Položíme-li v první rovnici $x = 0$, dostáváme ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ řešení $y = 0$, $y = \pm 1$. Získali jsem tři stacionární body $A_1 = [0,0]$, $A_2 = [0,1]$ a $A_3 = [0,-1]$.

Položíme-li ve druhé rovnici $y = 0$, pak z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ plyne řešení ve tvaru $x = 0$, $x = \pm 1$. Stacionární bod $A_1 = [0,0]$ jsme již vypočítali, takže na základě předpokladu $y = 0$ jsme získali dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1,0]$ a $A_5 = [-1,0]$.

Zbývá ještě prověřit možnost, že $x \neq 0$, $y \neq 0$. V tomto případě řešíme soustavu

$$2y^2 + x^2 - 1 = 0,$$
$$2y^2 + x^2 - 2 = 0.$$

Jestliže obě rovnice od sebe odečteme, dostáváme rovnici $1 = 0$, toto ale neplatí pro žádné x, y. Soustava nemá za tohoto předpokladu řešení. Žádný nový stacionární bod jsme nezískali.

Shrneme-li krok 3, výsledkem naší snahy bylo určení pěti stacionárních bodů: $A_1 = [0,0]$, $A_2 = [0,1]$, $A_3 = [0,-1]$, $A_4 = [1,0]$, $A_5 = [-1,0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu.

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{pmatrix}, \text{ kde}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2 - 3),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

5. Do matice parciálních derivací postupně dosadíme stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu dosadíme za proměnou x, y-ovou za y).

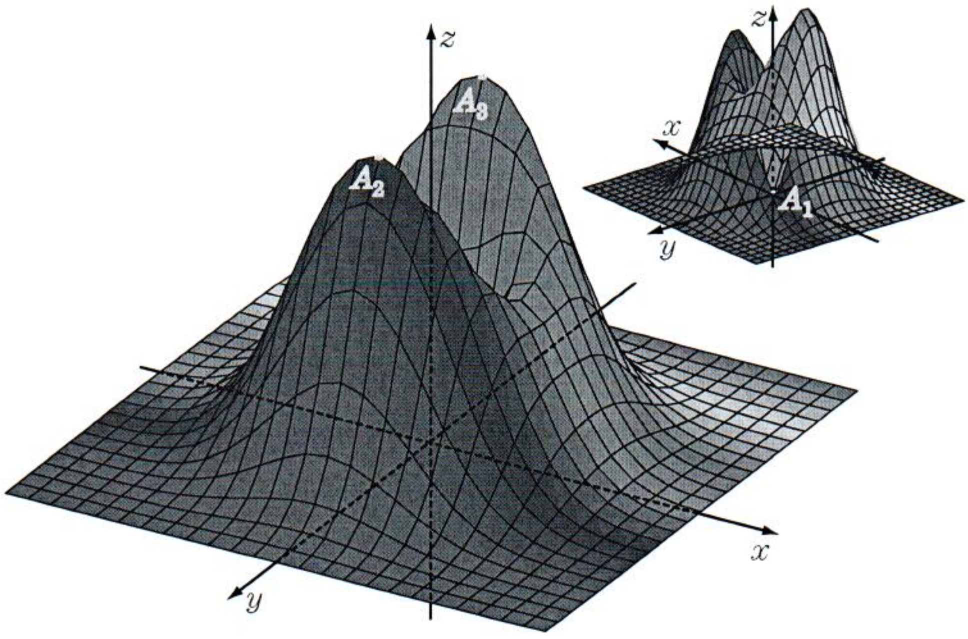
$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{e} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix}.$$

6. Určíme hodnoty D_1, D_2 a rozhodneme o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0,0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0,1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_3 = [0,-1]$	$-\frac{2}{e} < 0$	$\frac{16}{e^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{e}$
$A_4 = [1,0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1,0]$	$-\frac{4}{e} < 0$	$-\frac{8}{e^2} < 0$	extrém neexistuje

V bodě A_1 má funkce f ostré lokální minimum. V bodech A_2, A_3 má funkce f ostrá lokální maxima. V bodech A_4, A_5 funkce f extrém nemá, Obr. 6.1.3.



Obr. 6.1.3

Matice druhého diferenciálu je tedy

$$\begin{pmatrix} 24x^2-2 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

což je diagonální matice. Posoudit definitnost je tedy snazší přímo z hodnot na diagonále. Pokud jsou obě hodnoty kladné, je matice pozitivně definitní, což je případ čtyř bodů $(\pm\frac{1}{2}, \pm 1)$ - v nich má tedy funkce f lokální minimum. V bodě $(0,0)$ jsou obě hodnoty záporné, matice je tedy negativně definitní a v bodě $(0,0)$ má tedy funkce f lokální maximum. Ve zbylých čtyřech bodech je jedna hodnota na diagonále kladná a druhá záporná, matice je tedy indefinitní a extrému v daném bodě se nenabývá. □

3e ||

Úloha I.71. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, $x > 0, y > 0$.

Řešení. Funkce f je dle zadání definována na prvním kvadrantu. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2}.$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} y - \frac{50}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{20}{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice máme, že $y = \frac{50}{x^2}$, dosazením do druhé a přenásobením jmenovatelem získáme rovnici

$$x - \frac{20}{50^2}x^4 = 0.$$

Její řešení jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{\frac{50^2}{20}} = \sqrt[3]{125} = 5$. První řešení ovšem nemůže být částí řešení celé soustavy. Odpovídající hodnotou pro druhý kořen je $y_2 = \frac{50}{25} = 2$. Funkce f má tedy (v prvním kvadrantu) jediný stacionární bod $(5,2)$.
Druhé parciální derivace jsou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{100}{x^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{40}{y^3}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1.$$

Matice druhého diferenciálu v bodě $(5,2)$ je tedy

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

hlavní subdeterminanty jsou $D_1 = \frac{4}{5} > 0$ a $D_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, matice je tedy pozitivně definitní a funkce f má tudíž v bodě $(5,2)$ (ostré) lokální minimum $f(5,2) = 30$. □

Úloha I.72. $f(x,y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, kde $a > 0, b > 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.73. $f(x,y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, kde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.74. $f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$

Řešení. DOPLNIT □

Úloha I.75. $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

Řešení. Funkce f je dle zadání definována na $\mathbb{R}^2$. Spočtěme její parciální derivace. Máme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(16x - 6y) = e^{2x+3y}(16x^2 + 16x - 12xy + 6y^2 - 6y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2) + e^{2x+3y}(-6x + 6y) = e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y).$$

Stacionární body jsou ty, ve kterých jsou obě parciální derivace nulové. Najdeme je řešením soustavy

$$\begin{aligned} e^{2x+3y}(16x^2 + 16x - 12xy + 6y^2 - 6y) &= 0 \\ e^{2x+3y}(24x^2 - 18xy + 9y^2 - 6x + 6y) &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této rovnice jsou hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$. Dosadíme-li získané hodnoty do rovnice $x^2 - 2y = 0$, abychom vypočetli y-ové souřadnice stacionárních bodů, dostáváme $y_1 = 0, y_2 = 2$. Zkoumaná funkce má tedy dva stacionární body $B_1 = [0, 0], B_2 = [2, 2]$.

Nyní přistoupíme ke zkoumání charakteru bodů B_1, B_2 a k tomu je zapotřebí vypočítat parciální derivace druhého řádu. Obdržíme

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6 \qquad \text{a} \qquad f_{yy} = 6y.$$

Protože $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0.0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = -36 < 0$, vidíme, že bod B_1 je sedlovým bodem funkce $f(x, y)$.

Analogickým postupem ze vztahů $f_{xx}(2,2) \cdot f_{yy}(2,2) - [f_{xy}(2,2)]^2 = 108 > 0$ a $f_{xx}(2,2) = 12 > 0$ dostáváme, že bod B_2 je bodem lokálního minima funkce $f(x, y)$.

39

Příklad 8.11. Najděte lokální extrémy funkce tří proměnných dané vztahem $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$.

Řešení. Vyjdeme opět z parciálních derivací finkce $f(x, y, z)$, které mají tvar

$$f_x = 3x^2 - 3y - 3z, \qquad f_y = 3y^2 - 3x \qquad \text{a} \qquad f_z = 3z^2 - 3x.$$

Položíme-li obdržené parciální derivace rovny nule, dostáváme soustavu rovnic

$$x^2 - y - z = 0$$
$$y^2 - x = 0$$
$$z^2 - x = 0.$$

Dále lze dosadit y^2 za x do první a třetí rovnice, což dává vztahy

$$y^4 - y - z = 0$$
$$z^2 - y^2 = 0.$$

Z rovnosti $z^2 = y^2$ máme $z = y$ nebo $z = -y$.

Uvažujme nejprve případ $z = y$. Dosadíme-li za z do rovnice $y^4 - y - z = 0$, dostáváme

$$y(y^3 - 2) = 0.$$

Z obdrženého vztahu vyplývá, že $y_1 = 0$ nebo $y_2 = \sqrt[3]{2}$. Dále ihned vidíme že těmto hodnotám odpovídají hodnoty proměnné z ve tvaru $z_1 = 0, z_2 = \sqrt[3]{2}$.

Z rovnosti $x = z^2$ pak vypočteme $x_1 = 0$ a $x_2 = \sqrt[3]{4}$. Obdrželi jsme tedy dva stacionární body

$$B_1 = [0, 0, 0] \quad \text{a} \quad B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}].$$

Vyšetříme-li nyní případ $z = -y$, dostáváme po dosazení za proměnnou z do rovnice $y^4 - y - z = 0$ rovnost $y^4 = 0$, což nám dává kořen $y_3 = 0$. Pak ale také $z_3 = 0$ a $x_3 = 0$. V tomto případě jsme tedy neobdrželi žádný další stacionární bod, který by byl různý od bodů B_1 a B_2.

Pro parciální derivace druhého řádu dostaneme

$$f_{xx} = 6x, f_{yy} = 6y, f_{zz} = 6z, f_{xy} = -3, f_{xz} = -3, f_{yz} = 0.$$

Chceme-li nyní vyšetřit kvadratickou formu, kterou představuje diferenciál druhého řádu, pracujeme vlastně s determinantem

$$D = \begin{vmatrix} 6x & -3 & -3 \\ -3 & 6y & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{vmatrix}.$$

Uvažujeme-li bod $B_1 = [0, 0, 0]$, dostaneme

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ihned vidíme, že hlavní minor $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$ je záporný, což znamená, že příslušná kvadratická forma je indefinitní a počátek je tedy sedlovým bodem funkce $f(x, y, z)$.

V bodě $B_2 = [\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$ máme

$$D = \begin{vmatrix} 6\sqrt[3]{4} & -3 & -3 \\ -3 & 6\sqrt[3]{2} & 0 \\ -3 & 0 & 6\sqrt[3]{2} \end{vmatrix}$$

a vidíme, že $D_1 = 6\sqrt[3]{4} > 0, D_2 = 36 \cdot 2 - 9 > 0, D_3 = 216\sqrt[3]{16} - 108\sqrt[3]{2} > 0$. Kvadratická forma je tedy pozitivně definitní a bod B_2 je v důsledku toho bodem lokálního minima funkce $f(x, y, z)$.

4a

69. Příklad $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině Ω ohraničené křivkami $y = x^2$ a $y = 4$.

Řešení Nejprve nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$. Spočteme parciální derivace

$$f'_x = 6x^2 + 8x - 2y = 0,$$
$$f'_y = 2y - 2x = 0$$

a nalezneme stacionární body. Ze druhé rovnice plyne $y = x$. Po dosazení do první rovnice dostáváme $x(x+1) = 0$. Odtud plyne $a_1 = [0,0], a_2 = [-1,-1]$. Přitom $a_1 \in h(\Omega)$ a $a_2 \notin \Omega$. Funkce f tedy nemá uvnitř Ω lokální extrém.

Hranice množiny Ω je tvořena dvěma křivkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení dvou úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami $V_1 : y = 4$, $V_2 : y = x^2$. Je zapotřebí zvlášť vyšetřit body $A = [-2,4], B = [2,4]$, které jsou průniky vazeb V_1 a V_2. Úlohy f, V_1 a f, V_2 převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí jedné proměnné.

Úloha f, V_1 je ekvivalentní úloze nalézt lokální extrémy funkce

$$F_1(x) = f(x,4) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16.$$

Platí $F_1'(x) = 6x^2+8x-8 = 6(x+2)(x-\frac{2}{3})$. Stacionární body jsou $x = -2$ a $x = \frac{2}{3}$. Dále $F_1''(x) = 12x+8$. Odtud $F_1''(-2) = -16$. Tedy v $x = -2$ je maximum funkce F_1 a v $A = [-2,4]$ vázané maximum f. Podobně spočteme, že v bodě $a = \left[\frac{2}{3}, 4\right]$ dochází k vázanému minimu f.

Úloha f, V_2 je ekvivalentní úloze nalézt lokální extrémy funkce

$$F_2(x) = f(x, x^2) = x^4 + 4x^2.$$

Snadno se zjistí, že úloha f, V_2 má vázané minimum v bodě $b = [0,0]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech. Platí $f(a) = \frac{352}{27}, f(b) = 0, f(A) = 32, f(B) = 16$. Odtud $M = \left\{0, \frac{352}{27}, 16, 32\right\}$. Tedy $\max f(\Omega) = \max M = 32$ a nastává v bodě A a $\min f(\Omega) = \min M = 0$ a nastává v bodě b.

4c

70. Příklad $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$ na množině $\Omega : A = [0,0], B = [3,0], C = [0,5]$.

Řešení Nalezneme lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$. Spočteme parciální derivace $f'_x = 2x - 2$ a $f_y = 2y - 4$ a nalezneme stacionární bod $a = [1,2]$. Matice druhé derivace je rovna $f'' = f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hlavní minory této matice jsou kladné a proto v bodě a nastává lokální minimum funkce f. Platí $f(a) = -4$. Tedy $\mathbb{A} = \{-4\}$.

Hranice množiny Ω je tvořena třemi úsečkami. Vyšetření hranice $h(\Omega)$ se tedy rozpadá na vyřešení tří úloh na vázané extrémy s funkcí f a vazbami

$$V_1 : y = 0,$$
$$V_2 : 5x + 3y = 15,$$
$$V_3 : x = 0.$$

Zvlášť vyšetříme body A, B, C, které jsou průniky různých vazeb. Úlohy f, V_i, kde $i = 1,2,3$ převedeme na ekvivalentní úlohy nalezení lokálních extrémů funkcí F_i, kde

$$F_1(x) = f(x,0) = x^2 - 2x + 1,$$
$$F_2(x) = f\left(x, \tfrac{15-5x}{3}\right) = \tfrac{34}{9}x^2 - 12x + 6,$$
$$F_3(y) = f(0,y) = y^2 - 4y + 1.$$

Snadno se zjistí, že úloha f, V_1 má vázané minimum v bodě $a_1 = [1,0]$; f, V_2 má vázané minimum v $a_2 = [0,2]$; f, V_3 má vázané minimum v $a_3 = \left[\frac{27}{17}, \frac{40}{17}\right]$. Spočteme funkční hodnoty v nalezených bodech.

Platí $f(a_1) = 0, f(a_2) = -3, f(a_3) = -\frac{60}{17}, f(A) = 1, f(B) = 4, f(C) = 6$. Odtud $\mathbb{B} = \left\{0, -3, -\frac{60}{17}, 1, 4, 6\right\}$. $M = \left\{-4, 0, -3, -\frac{60}{17}, 1, 4, 6\right\}$. Odtud $\max f(\Omega) = \max M = 6$ v bodě C. Dále $\min f(\Omega) = \min M = -4$ v bodě a.

Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \ x_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \in (-1, 1).$$

Dopočteme $y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Obdržíme tedy další dva stacionární body $x_4^* = \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$, $x_5^* = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$.

Zbývá vyšetřit body $A = [-1, 0]$, $B = [0, -1]$, $C = [1, 0]$, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_1^*) = -2, \ f(x_2^*) = -\frac{5}{4}, \ f(x_3^*) = -\frac{7}{4}, \ f(x_4^*) = -\frac{3}{2}, \ f(x_5^*) = -\frac{1}{2},$$
$$f(A) = f(B) = f(C) = -1,$$
$$f(x_1^*) < f(x_3^*) < f(x_4^*) < f(x_2^*) < f(A) < f(x_5^*).$$

Funkce f má v bodě $x_5^* = \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$ globální maximum a v bodě $x_1^* = [0, 0]$ globální minimum.

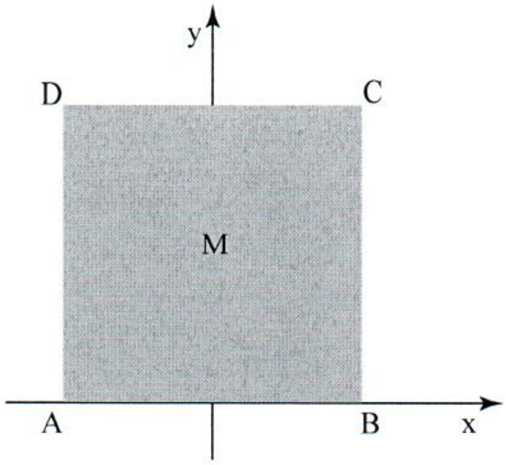
Poznámka 10.5. Při řešení příkladu mohlo být v bodě *c*) použito i Lagrangeovy funkce s vazbou $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, ale muselo by se dále uvažovat, že $y > 0$.

45 **Příklad 10.6.** Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-x^2}$ na čtverci M, který je určen body $A = [-1, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [1, 2]$, $D = [-1, 2]$.

Řešení. Množinu M tvoří čtverec mající vrcholy v bodech $A = [-1, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [1, 2]$, $D = [-1, 2]$ a všechny body, které v něm leží, obrázek 15. Existence maxima a minima opět plyne z věty 10.2. Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x, y) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \ \Rightarrow \ x = 0, \quad f_y(x, y) = 2y - 2 = 0 \ \Rightarrow \ y = 1.$$

Dostali jsme stacionární bod $x_1^* = [0, 1]$. Tento bod leží uvnitř množiny M. Dále hledáme body extrému funkce f na hranicích množiny M. Hranice



Obrázek 15: Množina M

množiny M je tvořena čtyřmii úsečkami. Úloha hledání vázaných extrémů funkce f se tedy rozpadá na čtyři případy, tj. na jednotlivé úsečky zadaného čtverce.

a) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = y = 0$ pro všechna $x \in (-1, 1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření $y = 0$ z rovnice vazby převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \in (-1, 1).$$

Dostali jsme stacionární bod $x_2^* = [0, 0]$.

b) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x, y) = x - 1 = 0$ pro $y \in (0, 2)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj. $x = 1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = 2y - 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 1 \in (0, 2).$$

Obdrželi jsme stacionární bod $x_3^* = [1, 1]$.

c) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = y - 2 = 0$ pro všechna $x \in (-1,1)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření $y = 2$ z rovnice vazby převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na ekvivalentní úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \in (-1,1).$$

Získali jsme stacionární bod $x_4^* = [0,2]$.

d) Hledáme vázané extrémy funkce f s vazbou $g(x,y) = x + 1 = 0$ pro $y \in (0,2)$. Vzhledem k jednoznačnému vyjádření proměnné x z rovnice vazby, tj. $x = -1$, převedeme úlohu o hledání vázaného extrému na úlohu nalezení lokálního extrému funkce $F(y) = y^2 - 2y + \mathrm{e}^{-1}$. Funkci zderivujeme, derivaci položíme rovnu nule

$$F'(y) = 2y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \in (0,2).$$

Dostali jsme stacionární bod $x_5^* = [-1,1]$.

Zbývá vyšetřit vrcholy čtverce $ABCD$, které jsou průniky různých vazeb. Spočteme jednotlivé funkční hodnoty v nalezených bodech a porovnáme je

$$f(x_2^*) = f(x_4^*) = 1, \quad f(x_3^*) = f(x_5^*) = -1 + \mathrm{e}^{-1},$$
$$f(A) = f(B) = f(C) = f(D) = \mathrm{e}^{-1},$$
$$f(x_3^*) < f(A) < f(x_2^*).$$

Funkce f má v bodech x_2^*, x_4^* globální maxima a v bodech x_3^*, x_5^* globální minima.

Příklad 10.7. Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + 2z^2$ na množině M dané nerovnostmi $\sqrt{x^2+y^2} \le z$, $z \le 3$.

Řešení. Množina M je kompaktní a funkce f je spojitá, pak dle věty 10.2 na množině M existuje maximum a minimum funkce f. Množina M viz obrázek 16.

Nejprve hledáme lokální extrémy funkce f uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace a položíme rovny nule,

$$f_x(x,y,z) = -2x = 0, \quad f_y(x,y,z) = -2y = 0, \quad f_z(x,y,z) = 4z = 0.$$

Finding Absolute Minimums and Maximums

The extreme value theorem guarantees that a (continuous) function achieves its maximum and its minimum values on a closed bounded domain. To find the maximum and minimum values, recall that we check the function's values at all of the critical points inside the domain, as well as the function's values on the boundary of the domain. By checking at these points, notice we find the absolute maximum (minimum) *value* – that is, the biggest (smallest) the function can be – as well as the *point(s)* that value is achieved at.

The following examples are from the book, but are rewritten slightly:

4d

EXAMPLE 4.33 Find the absolute maximum and minimum values of the function $f(x,y) = 2x^2+2y^2-x+y$ on the closed disk $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 1\}$.

First, find the critical points of $f(x,y)$. Calculate that $\nabla f(x,y) = (4x-1, 4y+1)$. Setting both $4x-1=0$ and $4y+1=0$, we see we must have both $x=\frac{1}{4}$ and $y=-\frac{1}{4}$. Therefore, the only critical point is $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$. This point is in the disk D, so we check the value of $f(\frac{1}{4},-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$.

Now, notice that the boundary of D is all the points on the circle $x^2+y^2=1$. We can break up the boundary into two parts: the upper half-circle $y=\sqrt{1-x^2}$ and the lower half-circle $y=-\sqrt{1-x^2}$.

For the upper half-circle, consider $g(x) = 2-x+\sqrt{1-x^2}$ (for $-1 \le x \le 1$). For all the points on the upper half-circle $y=\sqrt{1-x^2}$, $g(x) = f(x,y)$. We will find the extreme values of $g(x)$ on the interval $[-1,1]$. Setting $g'(x) = -1-x/\sqrt{1-x^2} = 0$, we find the only critical point is at $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. We need to check the values of g at this point and at the endpoints of the interval:

$$g(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = 2+\sqrt{2}; \quad g(-1) = 3; \quad g(1) = 1;$$

None of these values are smaller than $f(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$, so none are candidates for the absolute minimum of f. Since we're on the upper half circle, $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = g(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2+\sqrt{2}$. This is the largest value we've found for f (so far!), so this is a possibility for the absolute maximum of f.

To check the values of f on the lower half-circle, consider $h(x) = f(x,-\sqrt{1-x^2}) = 2-x-\sqrt{1-x^2}$ (for $-1 \le x \le 1$). To find the critical values of $h(x)$ on $[-1,1]$, find the critical points in the interval and check the values of $h(x)$ at these critical points and at the endpoints. You should find that the only critical point is $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ and that $h(x)$ is maximized at $x=-1$ (with value $h(-1)=3$) and minimized at $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (with value $h(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2-\sqrt{2}$). Neither of these values is larger or smaller than ones we've already found, though.

Putting this together, we see that $f(x,y)$ is minimized at $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$, with value $f(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -\frac{1}{4}$, and is maximized at $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$, with value $f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2+\sqrt{2}$.

Notice that we could have checked the boundary in one step: we can describe all the points on the circle by $(\cos\theta,\sin\theta)$ where θ ranges from 0 to 2π. Then, on the boundary, the function is equal to $g(\theta) = 2(\cos\theta)^2+2(\sin\theta)^2-\cos\theta+\sin\theta = 2-\cos\theta+\sin\theta$. Then, we find critical points wherever $g'(\theta) = \sin\theta+\cos\theta = 0$. On $[0,2\pi]$, $\tan\theta=-1$ only at $\frac{3\pi}{4}$ and $\frac{7\pi}{4}$. These values of θ correspond to the points $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ and $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ that we found above! Checking the values of the function at these two points on the boundary and at the critical point on the inside of the disk, we find the same absolute minimum and maximum as with the previous method. This is the method the book uses; feel free to use whichever you like better. (*This method is typically easier because you can avoid the square roots in the derivatives and algebra above! It's a good reason to review trig, including learning the values where sine, cosine, and tangent are* 0 *and* ± 1.)

EXAMPLE 4.34 Find the absolute minimum and absolute maximum values of the function $f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2$ on the rectangle $D = \{(x, y) | \frac{1}{4} \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$. (I changed the rectangle slightly from what is given in the book.)

First, solve for the critical points of the function: Set $3x^2 - 3y = 0$ and $6y - 3x = 0$. From the first equation, at a critical point, we must have $y = x^2$. Then from the second, $6x^2 - 3x = 0$ implies that either $x = 0$ or $x = \frac{1}{2}$. Therefore, the only two critical points are $(0, 0)$ and $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. However, the point $(0, 0)$ is not on the rectangle we're interested in, so we do not consider it! The value of the function at the only critical point that is in the rectangle is $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -\frac{1}{16}$.

We break the boundary up into four different lines: $x = \frac{1}{4}$ (with $0 \le y \le 2$); $x = 1$ (with $0 \le y \le 2$); $y = 0$ (with $\frac{1}{4} \le x \le 1$); and $y = 2$ (with $\frac{1}{4} \le x \le 1$). (Draw a picture to see this clearly!)

On the line $x = \frac{1}{4}$, consider $g(y) = f(\frac{1}{4}, y)$ (on the interval $[0, 2]$). To solve for the critical points, set $g'(y) = 0$: $g'(y) = -\frac{3}{4} + 6y = 0$. The only critical point is at $y = \frac{1}{8}$. Since this is in $[0, 2]$, check the values $g(\frac{1}{8}) = \frac{1}{32}$, $g(0) = \frac{1}{64}$, and $g(2) = \frac{673}{64}$. Notice that the point on this line corresponding to $y = 2$ (that is, the point $(\frac{1}{4}, 2)$) is a possible maximum for f (It's the largest value of f we've found so far, but we still have three more parts of the boundary to check!)

Similarly, on $y = 0$, consider $g(x) = x^3$ on the interval $[\frac{1}{4}, 1]$. Once you've found the maximum and minimum on this line (as well as on the other two lines that make up the boundary), compare all the values you've checked to find out that the absolute maximum and the absolute minimum are

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{4}, 2) &= \tfrac{673}{64} \quad (\leftarrow \text{ absolute maximum}) \\ f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}) &= -\tfrac{1}{16} \quad (\leftarrow \text{ absolute minimum}) \end{aligned}$$

EXAMPLE 4.35 Try this example on your own! When you look at the boundary, you can break it into three parts: the upper half-circle $y = \sqrt{1 - x^2}$ (with $-1 \le x \le 0$); the line $y = -x + 1$ (with $0 \le x \le 1$) and the lower half-circle $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (with $-1 \le x \le 1$).

Or, if you'd prefer, you can divide the boundary into two parts: the line $y = -x + 1$ (with $0 \le x \le 1$) and the circle, described by $(\cos\theta, \sin\theta)$ where $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$.

vanou na uzavřené množině D_f. Nechť hranice této množiny je křivka o rovnici $g(x, y) = 0$. Globální extrémy funkce f na množině D_f budeme určovat takto:

1. Určíme lokální extrémy funkce f na množině D_f, ze které vyloučíme hranici.

2. Určíme lokální extrémy této funkce vázané podmínkou $g(x, y) = 0$.

3. Porovnáme funkční hodnoty všech extrémů. Extrém s největší funkční hodnotou bude **globálním maximem**, extrém s nejmenší funkční hodnotou bude **globálním minimem**.

Poznámka

Je-li hranice tvořena konečným počtem křivek, vyšetřujeme vázané extrémy na jednotlivých křivkách. V tomto případě ovšem musíme uvažovat i vrcholy hraničních křivek při konečném porovnávání funkčních hodnot.

Poznámka

Analogicky se postupuje i v případě funkcí tří a více proměnných.

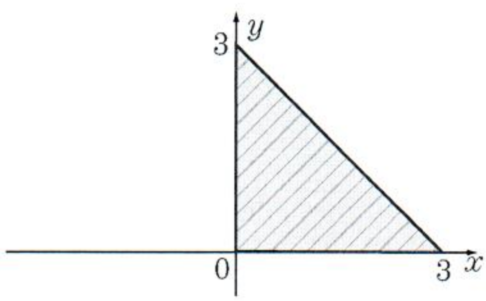
4e

Řešené úlohy

Příklad 6.3.1. Nalezněte globální extrémy funkce $z = f(x, y)$,

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,$$

je-li $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \land y \geq 0 \land y \leq -x + 3\}$.



Obr. 6.3.1

Řešení: Definičním oborem funkce f je trojúhelník s vrcholy $A = [0,0]$, $B = [3,0]$, a $C = [0,3]$ plus všechny body, které v něm leží, Obr. 6.3.1.

1. Nejdříve budeme hledat lokální extrémy funkce f v bodech ležících uvnitř trojúhelníku ABC.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4y + 4x = 0.$$

Řešením této soustavy je bod $A_1 = [1,1]$, tento bod ovšem leží uvnitř trojúhelníku ABC, leží tedy v množině D_f a má smysl hledat v tomto bodě lokální extrém funkce f.

Sestavíme matici Q a dosadíme do matice Q bod A_1,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Determinant $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = -24 < 0$, extrém v bodě A_1 neexistuje.

2. Hraniční křivka se skládá ze tří úseček ležících na přímkách. Jedná se o přímku $x = 0$ pro $y \in (0,3)$, $y = 0$ pro $x \in (0,3)$ a $y = -x + 3$ pro $x \in (0,3)$. Prověříme existenci vázaných extrémů funkce f na jednotlivých úsečkách.

a) Nechť $g(x,y) = x = 0$ pro $y \in (0,3)$. Pak

$$f(y) = -2y^2 - 1$$
$$\frac{df}{dy} = -4y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Dosadili jsme $x = 0$ do funkce f a získali jsme tak funkci pouze jedné proměnné y. Funkci jsme derivovali podle y a dostali jsme stacionární bod $y = 0$. Ovšem tento bod neleží v intervalu $(0,3)$, a tedy vázaný extrém na této úsečce neexistuje.

b) Nechť $g(x, y) = y = 0$ pro $x \in (0, 3)$. Pak

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 6x - 1 \\
f'(x) &= \frac{df}{dx} = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.
\end{aligned}
$$

Ovšem bod $x = 3$ neleží v intervalu $(0, 3)$ a tedy vázaný extrém neexistuje.

c) Nechť $g(x, y) = y + x - 3 = 0$ pro $x \in (0, 3)$. Dosazujeme za y do funkce f výraz $y = -x + 3$, tedy

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 2(-x + 3)^2 + 4x(-x + 3) - 6x - 1 \\
&= -5x^2 + 18x - 19 \\
f'(x) &= -10x + 18 = 0 \Rightarrow x = \tfrac{9}{5}.
\end{aligned}
$$

Bod $x = \frac{9}{5}$ leží v intervalu $(0, 3)$ a má smysl zkoumat, zda-li v tomto bodě má funkce f vázaný extrém. Vypočítáme druhou derivaci funkce f a určíme hodnotu derivace v bodě $x = \frac{9}{5}$,

$$f''(\tfrac{9}{5}) = -10 < 0 \Rightarrow \text{ostré lokální maximum.}$$

Dopočítáme y-ovou souřadnici z rovnice $y = -x + 3$, tedy $y = \frac{6}{5}$. Funkce f má v bodě $A_2 = [\frac{9}{5}, \frac{6}{5}]$ vázané lokální maximum.

3. Protože je hranice tvořená jednotlivými křivkami, musíme ještě vyšetřit vrcholy trojúhelníka ABC. Vypočítáme jednotlivé funkční hodnoty a vzájemně je porovnáme.

$$f(A_2) = -\tfrac{14}{5}, \quad f(A) = -1, \quad f(B) = -10, \quad f(C) = -19.$$

Porovnáme jednotlivé funkční hodnoty,

$$f(C) < f(B) < f(A_2) < f(A).$$

Funkce f má v bodě $A = [0, 0]$ globální maximum $z = -1$ a v bodě $C = [0, 3]$ globální minimum $z = -19$.

5

Příklad 8.12. Najděte nejkratší vzdálenost bodu $B = [1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

Řešení. Vzdálenost libovolného bodu $[x, y, z]$ od bodu $B = [1, 1, 1]$ je dána vztahem

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}.$$

Pokud ovšem bod $[x, y, z]$ leží v rovině $3x + y + z = 2$, můžeme vyjádřit některou z proměnných x, y, z pomocí zbylých dvou. Máme tedy například $z = 2 - 3x - y$, což znamená, že je zapotřebí najít extrémní hodnoty funkce

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (1-3x-y)^2}.$$

Užitečným trikem, který se při minimalizaci vzdálenosti používá, je umocnění funkčního vztahu, čímž odstraníme odmocninu a zjednodušíme tak vztahy, které obdržíme při výpočtu parciálních derivací minimalizované funkce. Budeme tedy hledat extrém funkce.

$$d^2 = f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (1-3x-y)^2.$$

Dostáváme

$$f_x = 2(x-1) - 2(1-3x-y).(+3) = 20x + 6y - 8$$

,

$$f_y = 2(y-1) - 2(1-3x-y) = 4y + 6x - 4$$

. Vídíme, že funkce d^2 má jediný kritický bod

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{8}{44} = \frac{2}{11}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 8 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{32}{44} = \frac{8}{11}.$$

Z povahy úlohy vyplývá, že nalezený bod $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}]$ je bodem lokálního i globálního minima funkce d^2, protože v rovině $3x + y + z = 2$ musí ležet bod, který je nejblíž k bodu $B = [1, 1, 1]$. Tyto úvahy už jen formálně potvrďme výpočtem, kdy ze vztahů $f_{xx} = 20, f_{yy} = 4, f_{xy} = 6$ vyplývá

$$f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 = 44 > 0,$$

a to znamená, že bod $[\frac{2}{11}, \frac{8}{11}]$ je skutečně bodem lokálního minima zkoumané funkce. Zbývá určit hodnotu nejkratší vzdálenosti bodu $B = [1, 1, 1]$ od roviny $3x + y + 2 = 2$. Je dána vztahem

$$d = \sqrt{\left(\frac{9}{11}\right)^2 + \left(\frac{3}{11}\right)^2 + \left(1 - \frac{6}{11} - \frac{8}{11}\right)^2} = \frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

6

Příklad 8.13. Obdélníková dřevěná bedna bez víka má objem $C\mathrm{dm}^3$, kde C je kladná konstanta. Jaké mají být rozměry bedny, jestliže chceme minimalizovat spotřebu dřeva potřebného k její výrobě. Při výpočtu zanedbejte tloušťku stěn bedny.

Řešení. Označíme-li délky jednotlivých stran bedny pomocí proměnných x, y a z, pak je objem bedny dán vztahem

$$V = xyz = C.$$

Naším úkolem je minimalizovat plochu stěn bedny, přičemž celkový obsah je dán vztahem

$$S = xy + 2xz + 2yz.$$

Obsah minimalizované plochy je tedy obecně funkcí tří proměnných. Využijeme-li ale skutečnosti, že $z = \frac{C}{xy}$, můžeme náš problém redukovat na hledání extrému funkce dvou proměnných tvaru

$$S = xy + \frac{2xC}{xy} + \frac{2yC}{xy} = xy + \frac{2C}{y} + \frac{2C}{x}.$$

Parciální derivace funkce S podle proměnných x a y mají tvar

$$S_x(x, y) = y - \frac{2C}{x^2} \qquad \text{a} \qquad S_y(x, y) = x - \frac{2C}{y^2}$$

a jsou rovny nule, jestliže

$$y = \frac{2C}{x^2} \qquad \text{a} \qquad x = \frac{2C}{y^2}, \qquad \text{neboli} \qquad yx^2 = 2C = xy^2.$$

Z posledního vztahu dostáváme rovnici $xy(x - y) = 0$, jejímž řešením je vzhledem k požadavku nenulovosti proměnných bod, pro který platí $x = y$. Odtud dále dostáváme $x = y = \sqrt[3]{2C}$. Z povahy úlohy a ze skutečnosti, že funkce S má pouze jediný stacionární bod, vyplývá, že bod $[\sqrt[3]{2C}, \sqrt[3]{2C}]$ je bodem lokálního minima funkce S. Podotýkáme ještě, že třetí rozměr z je dán vztahem $z = \frac{\sqrt[3]{2C}}{2}$.

65. Příklad Určete rozměry pravoúhlé nádrže tvaru kvádru o objemu $V = 32\mathrm{m}^3$ tak, aby dno a stěny měly co nejmenší povrch.

Řešení Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme minimalizovat povrch nádrže $P(x, y, z)$, je-li předepsán její objem $V(x, y, z) = 32\mathrm{m}^3$. Máme tedy nalézt vázané minimum funkce $P(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ s vazbou $V(x, y, z) = xyz = 32$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = \frac{32}{xy}$. Úlohu na vázaný extrém funkce P převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(x, y) = P\left(x, y, \frac{32}{xy}\right) = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}.$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí

$$f'_x = y + \frac{-64}{x^2} = 0,$$
$$f'_y = x + \frac{-64}{y^2} = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = \frac{64}{x^2}$. Dosazením do druhé rovnice dostáváme $x - \frac{x^4}{64} = 0$. Odtud $x = 0 \vee x = 4$. Zřejmě $x = 0$ nevyhovuje zadání úlohy.

Nalezli jsme jediný stacionární bod $a = [4, 4]$. Dopočítáme $z = \frac{32}{4\cdot 4} = 2$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{128}{x^3}, f''_{yy} = \frac{128}{y^3}, f''_{xy} = 1$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = 2 > 0$, $D_2(a) = 3 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [4, 4]$ lokální minimum funkce f a tedy v bodě $[4, 4, 2]$ vázané minimum funkce P. Rozměry nádrže jsou $4\mathrm{m} \times 4\mathrm{m} \times 2\mathrm{m}$.

7

66. Příklad Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96cm a jeho objem byl co největší.

Řešení Označme x, y, z rozměry kvádru. Podle zadání máme maximalizovat objem $V(x, y, z)$, je-li předepsáno, že $4x + 4y + 4z = 96$, tj. že součet délek hran kvádru je 96cm. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $4x + 4y + 4z = 96$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = 24 - x - y$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(x, y) = V(x, y, 24 - x - y) = xy(24 - x - y).$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí

$$f'_x = y(24 - x - y) - xy = 0,$$
$$f'_y = x(24 - x - y) - xy = 0.$$

Triviální řešení, kdy $x = 0 \vee y = 0$ nebudeme uvažovat. Soustavu lze tak převést na tvar

$$2x + y = 24,$$
$$x + 2y = 24.$$

Snadno nalezneme jediné řešení $a = [8, 8]$. Dopočítáme $z = 24 - 8 - 8 = 8$. Spočteme matice $f'', f''(a)$. Platí $f''_{xx} = -2y, f''_{yy} = -2x, f''_{xy} = 24 - 2x - 2y$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{pmatrix} -2y & 24 - 2x - 2y \\ 24 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} -16 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = -16 < 0$, $D_2(a) = 192 > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [8, 8]$ lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[8, 8, 8]$ vázané maximum funkce V. Rozměry kvádru jsou 8cm × 8cm × 8cm.

67. Příklad Určete rozměry otevřené nádrže tvaru kvádru tak, aby při daném povrchu $P = 108\text{m}^2$ měla co největší objem.

Řešení Označme x, y rozměry dna a z hloubku nádrže. Podle zadání máme maximalizovat objem nádrže $V(x, y, z)$, je-li předepsáno, že $xy + 2yz + 2xz = 108$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(x, y, z) = xyz$ s vazbou $xy + 2yz + 2xz = 108$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k z. Platí $z = \frac{108-xy}{2(x+y)}$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(x, y) = V\left(x, y, \frac{108 - xy}{2(x + y)}\right) = \frac{xy(108 - xy)}{2(x + y)}.$$

Spočteme parciální derivace, položíme je rovny nule a získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých x, y. Platí

$$f'_x = \frac{-y^2(x^2 + 2xy - 108)}{2(x + y)^2} = 0,$$
$$f'_y = \frac{-x^2(y^2 + 2xy - 108)}{2(x + y)^2} = 0.$$

Triviální řešení, kdy $x = 0 \vee y = 0$ nebudeme uvažovat. Soustavu lze tak převést na tvar

$$x^2 + 2xy = 108,$$
$$y^2 + 2xy = 108.$$

Odtud plyne, že $x = y$ a $3x^2 = 108$. Tedy $x = 6$. Nalezli jsme jediný stacionární bod $a = [6, 6]$. Dopočítáme $z = \frac{108-36}{2\cdot 12} = 3$. Spočteme matice f'', $f''(a)$. Platí $f''_{xx} = \frac{-y^4-108y^2}{(x+y)^3}$, $f''_{yy} = \frac{-x^4-108x^2}{(x+y)^3}$, $f''_{xy} =$ $= \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3}$. Odtud plyne

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{-y^4-108y^2}{(x+y)^3} & \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3} \\ \frac{108xy-x^3y-3x^2y^2-xy^3}{(x+y)^3} & \frac{-x^4-108x^2}{(x+y)^3} \end{pmatrix}, \quad f''(a) = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}.$$

Určíme hlavní minory.

Platí $D_1(a) = -3 < 0$, $D_2(a) = \frac{27}{4} > 0$. Podle kritéria nastává v bodě $a = [6, 6]$ lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[6, 6, 3]$ vázané maximum funkce V. Rozměry nádrže jsou 6m × 6m × 3m.

68. Příklad Určete rozměry válce o největším objemu, jestliže jeho povrch je $6\pi\text{dm}^2$.

Řešení Označme r, v poloměr a výšku válce. Podle zadání máme maximalizovat jeho objem $V(r, v)$, je-li předepsáno, že povrch válce je $P(r, v) = 6\pi\text{dm}^2$. Máme tedy nalézt vázané maximum funkce $V(r, v) = \pi r^2 v$ s vazbou $P(r, v) = 2\pi rv + 2\pi r^2 = 6\pi$. Po úpravě má vazba tvar $rv + r^2 = 3$. Vazba je jednoznačně řešitelná vzhledem k v. Platí $v = \frac{3-r^2}{r}$. Úlohu na vázaný extrém funkce V převedeme na úlohu o lokálních extrémech funkce

$$f(r) = V\left(r, \frac{3 - r^2}{r}\right) = \pi r(3 - r^2).$$

Spočteme

$$f'(r) = \pi(3 - r^2) - 2\pi r^2 = 3\pi - 3\pi r^2.$$

Derivaci položíme rovnu nule a získáme rovnici $3 - 3r^2 = 0$. Odtud plyne $r = \pm 1$. Zřejmě řešení $r = -1$ nevyhovuje. Jediný stacionární bod je $r = 1$. Z vazby dopočítáme $v = 2$. Spočteme $f''(r) = -6\pi r$ a $f''(1) = -6\pi < 0$. Odtud plyne, že v bodě $r = 1$ nastává lokální maximum funkce f a tedy v bodě $[1, 2]$ vázané maximum funkce V. Rozměry válce jsou $r = 1\text{dm}, v = 2\text{dm}$.

8 **Příklad 6.51:** Rozložme kladné číslo a na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení: Hledáme extrém funkce $f(x,y,z,u) = xyzu$ za podmínky $x+y+z+u = a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $u > 0$.
Z vazební podmínky vyjádříme proměnnou u, dosadíme do účelové funkce. Formalizace:

$$F(x,y,z) = xyz(a-x-y-z) \quad \longrightarrow \quad max, \qquad x > 0,\ y > 0,\ z > 0.$$

Hledáme body, ve kterých platí

$$F' = (\,yz(a-2x-y-z),\ xz(a-x-2y-z),\ xy(a-x-y-2z)\,) = \mathbf{0}.$$

Vzhledem k tomu, že žádná proměnná nemůže být rovna nule, řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= a \\ x+2y+z &= a \\ x+y+2z &= a \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad x = y = z = \frac{a}{4}\ (=u)$$

Dostáváme stacionární bod $A = \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

Z charakteru úlohy vyplývá, že jsme našli řešení úlohy; přesto se přesvědčíme pomocí Sylvestrova kriteria, že se jedná o maximum:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -2yz, & f''_{xy} &= z(a-2x-2y-z); \\ f''_{yy} &= -2xz, & f''_{xz} &= y(a-2x-y-2z); \\ f''_{zz} &= -2xy, & f''_{yz} &= x(a-x-2y-2z); \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f''_{xx}(A) &= f''_{yy}(A) = f''_{zz}(A) = -\tfrac{a^2}{8}, \\ f''_{xy}(A) &= f''_{xz}(A) = f''_{yz}(A) = -\tfrac{a^2}{16}. \end{aligned}$$

$$f'' = \left(-\frac{a^2}{16}\right)^3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_3(A) = -\frac{a^6}{4^6}\cdot 6 < 0, \quad D_2(A) = \frac{a^4}{4^4}\cdot 3 > 0, \quad D_1(A) = -\frac{a^2}{8} < 0$$

– v bodě A skutečně nastane maximum o hodnotě $\frac{a^4}{4^4}$. Číslo je třeba rozdělit na čtyři stejné díly.

Příklad 6.52: Máme najít extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + y^2 = 2$.

Řešení: V tomto případě nemůžeme vyjádřit z podmínky žádnou proměnnou jednoznačně, je vhodnější použít parametrické rovnice. Podmínka je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, parametrické rovnice mají tedy tvar

$$x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$