3. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Věta 1. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je uzavřená a zároveň omezená.

Věta 2. Spojitá funkce na kompaktu nabývá svého maxima a minima.

Věta 3.
- Funkce je spojitá právě tehdy, když vzor otevřené množiny je otevřená množina.
- Funkce je spojitá právě tehdy, když vzor uzavřené množiny je uzavřená množina.

Věta 4 (Nutná podmínka pro lokální extrém)**.** Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém. Pokud existuje parciální derivace $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$, pak je nutně v bodě a rovna nule.

Algoritmus na $\mathbb{R}^n$:

1. Najdeme stacionární body
2. Zkusíme odhadnout, zda jsou dotyčné body globální extrémy - pomocí známých odhadů nebo limit v nekonečnu

Algoritmus na uzavřených množinách:
Úvaha: spojitá funkce na uzavřené omezené množině vždy nabývá maxima a minima.

1. Otestujeme vnitřek množiny - najdeme stacionární body
2. Otestujeme hranici - obvykle dosazením na funkci jedné proměnné
3. Otestujeme krajní body hranice
4. Funkční hodnoty všech těchto bodů porovnáme

Příklady

1. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, ani jedno

   (a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
   (b) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x < y < x + 3\}$
   (c) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$
   (d) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$
   (e) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| < 1\}$
   (f) $\mathbb{R} \times (1, 2)$
   (g) $\mathbb{R} \times [1, 2]$

2. Určete, zda jsou množiny otevřené, uzavřené, ani jedno

   (a) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
   (b) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; x^2 + z^2 = 1\}$
   (c) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; x^2 + z^2 \leq 1\}$
   (d) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z; \}$
   (e) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1; |z| \leq 1\}$
   (f) $\{[t,t,-t], t \in \mathbb{R}\}$

3. Najděte globální extrémy funkcí

   (a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$
   (b) $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$
   (c) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(2y^2 + x^2)$
   (d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
   (e) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$
   (f) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$
   (g) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3(xy + xz)$

4. Najděte globální extrémy funkcí na množině M

   (a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, M je ohraničená křivkami $y = x^2$ a $y = 4$.
   (b) $f(x,y) = y^2 - 2y + e^{-x^2}$ na čtverci $[-1,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[-1,2]$
   (c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$, M je trojúhelník $[0,0]$, $[3,0]$, $[0,5]$
   (d) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - x + y$, $M = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$
   (e) $f(x,y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$, $M = \{x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x + 3\}$

5. Najděte nejkratší vzdálenost bodu $B = [1,1,1]$ od roviny $3x + y + z = 2$.

6. Dřevěná bedna tvaru kvádru bez víka má objem $C > 0$. Jaké mají být rozměry bedny, chceme-li minimalizovat spotřebu dřeva při její výrobě?

7. Určete rozměry kvádru tak, aby součet délek jeho hran byl 96 cm a jeho objem byl co největší.

8. Rozložme kladné číslo a na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.