2. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. *P*arciální derivací funkce f v bodě $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ podle proměnné x_i definujeme jako limitu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_i + t, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n)}{t}.$$

Definice 2. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. *Gradientem* funkce f v bodě a rozumíme vektor

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Definice 3. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$, $f \in C^1(G)$. Pak graf funkce

$$T : x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *tečnou nadrovinou* ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Příklady

1. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

   (a) $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 3x2y$

   (b) $f(x, y) = \dfrac{\sin y^2}{x}$

   (c) $f(x, y) = xy \tan \left(\dfrac{x}{y} \right)$

   (d) $f(x, y) = x^y$

   (e) $f(x, y) = xe^{xy}$

   (f) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$

   (g) $f(x, y) = (x + y)^x$

   (h) $f(x, y) = 3 \sqrt[5]{xy^2}$

   (i) $f(x, y) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + y}{x - y}$

   (j) $f(x, y) = \operatorname{arcctg} \dfrac{x + y}{x - y}$

Zkouškové příklady

2. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$, napište rovnici tečny v bodě a

   (a) $f(x,y) = |x^2 - y^2|$, $a = [1,2]$

   (b) $f(x,y) = e^{x^2-y} + 7y + |xy|$, $a = [1,2]$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{y + \sin x}$, $a = [0,1]$

   (d) $f(x,y) = \min\{x^2 + y^2; 2 - x^2 - y^2\}$, $a = [1,2]$

   (e) $f(x,y) = \sqrt[3]{\ln \frac{x}{y}}$, $a = [1,2]$

   (f) $f(x,y) = x^{(y^x)}$, $a = [1,2]$

   (g) $f(x,y) = (\arctan \sqrt{x^2 + y^2})^4$, $a = [1,2]$

   (h) $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x \cos y),\ x \geq 0 \\ \cos(x \sin y) + 2,\ x < 0 \end{cases}$, $a = [1,2]$

   (i) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x + y - 1}$, $a = [1,2]$

Bonusové příklady

3. Najděte parciální derivace 1. řádu podle všech proměnných, určete D_f a $D_{f'}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

4. Nechť T je tečná rovina ke grafu funkce $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4$, která je kolmá k přímce $\{(t,t,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$. Ve kterém bodě protíná T osu x (přímku $\{(0,0,t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$)?