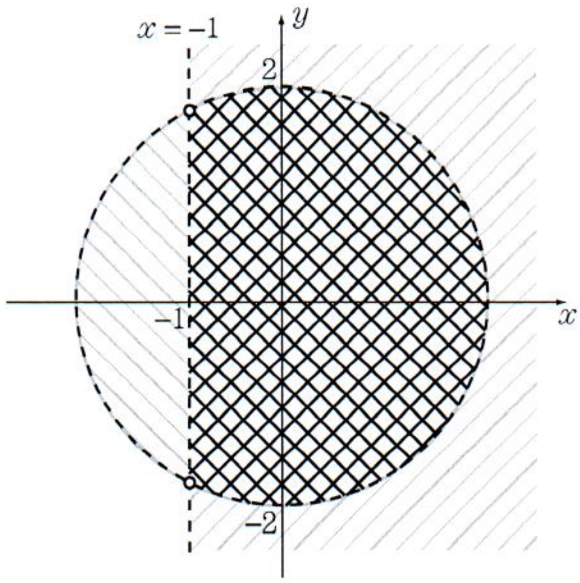


Obr. 4.1.1

Příklad 4.1.2. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \sqrt{y \sin x}.$$

2a

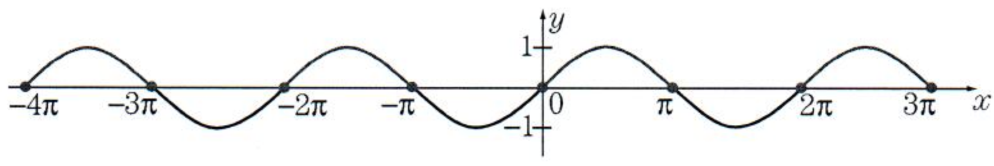
Řešení: Zformulujeme omezující podmínku na definiční obor, $y \sin x \geq 0$. Tato nerovnice je splněna, když oba činitelé jsou buď současně nezáporní, nebo současně nekladní,

$$y \sin x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0).$$

Zbývá diskutovat podmínku $\sin x \geq 0$ resp. $\sin x \leq 0$. Řešením první nerovnice je sjednocení intervalů

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 0 + k2\pi, \pi + k2\pi \rangle, \text{ kde } \mathbb{Z} \text{ je množina celých čísel.}$$

Pro hodnoty x z těchto intervalů je funkce $\sin x$ nezáporná, červená část sinusoidy, Obr. 4.1.2.



Obr. 4.1.2

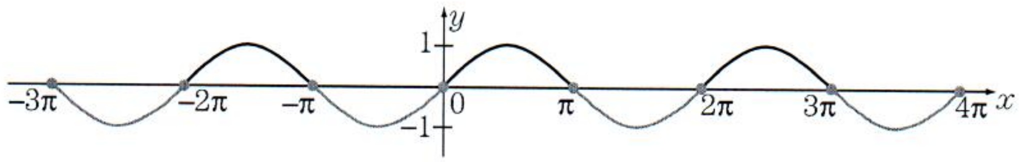
||

Řešením druhé nerovnice je sjednocení intervalů

2a

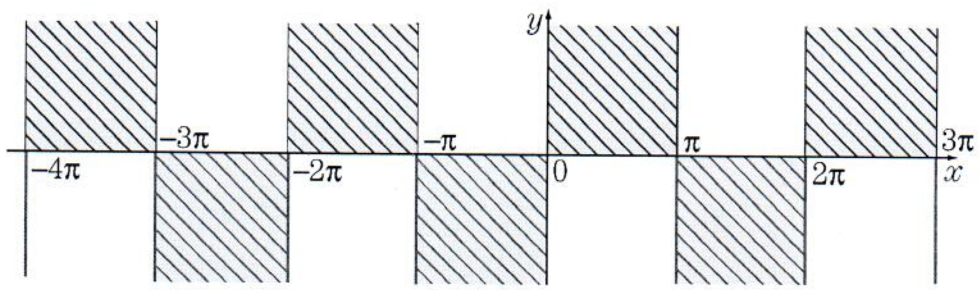
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle -\pi + k2\pi, 0 + k2\pi \rangle.$$

Pro hodnoty x z těchto intervalů je funkce $\sin x$ nekladná, modrá část sinusoidy, Obr. 4.1.3.



Obr. 4.1.3

Grafické vyjádření definičního oboru zadané funkce je na Obr. 4.1.4.



Obr. 4.1.4

Vezmeme-li např. $x \in (0, \pi)$, hodnota funkce $\sin x \geq 0$ a současně musí být $y \geq 0$.

Příklad 4.1.3. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \arcsin(x + y).$$

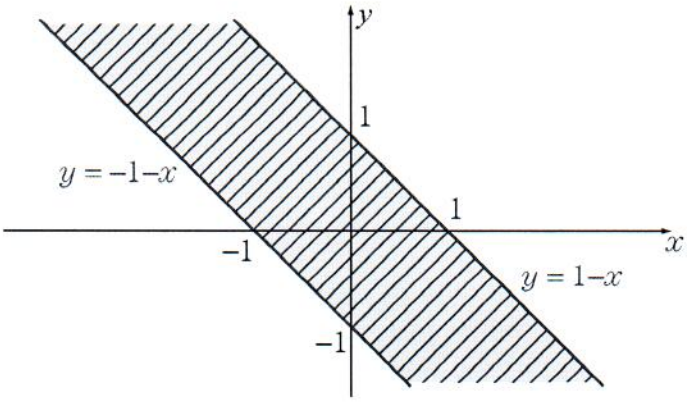
Řešení: Funkce arkus sinus je schopna působit pouze na reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Musíme zařídit, že argument funkce arkus sinus bude nabývat jen hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Dostáváme omezující podmínku na definiční obor ve tvaru $-1 \leq x + y \leq 1$. Jedná se o systém dvou nerovnic,

$$-1 \leq x + y \quad \wedge \quad x + y \leq 1.$$

Řešením pak bude

$$-1 - x \leq y \quad \wedge \quad y \leq 1 - x.$$

Definičním oborem je průnik dvou poloprostorů s hraničními přímkami $y = -1-x$ a $y = 1 - x$. Nejdříve zakreslíme hraniční přímky a pak vyznačíme vlastní průnik poloprostorů, viz. Obr. 4.1.5.



Obr. 4.1.5

25

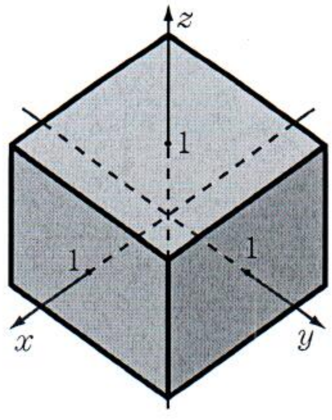
Příklad 4.1.4. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce tří proměnných

$$u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z.$$

Řešení: Funkce arkus sinus je schopna působit jen na čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$,

$$-1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq z \leq 1.$$

Definiční obor: $\mathrm{D}_u = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |z| \leq 1\}$, jedná se o krychli se středem v počátku a délkou hrany 2.



Obr. 4.1.6

8. Definiční obory, obory hodnot, hladiny funkce více proměnných

Další příklady na procvičení TRIAL[π] 606.1

8.1. **Definiční obory a obory hodnot.** Pro následující funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a) nalezněte a graficky znázorněte definiční obor D_f,
(b) nalezněte obor hodnot H_f.

(1) $f(x, y) = \sqrt{x^3y^3}$,
(2) $f(x, y) = \log(xy + 1)$,
(3) $f(x, y) = \sqrt{xy - 1}$,
(4) $f(x, y) = \log(2x - y + 1)$,
(5) $f(x, y) = \ln(1 - |x - y|)$,
(6) $f(x, y) = \sqrt{2x + 8 - x^2 - y^2}$,
(7) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$,
2c • (8) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \log(16 - x^2 - 16y^2)$ (bez oboru hodnot),
2e • (9) $f(x, y) = \sqrt{\sin x \sin y}$,
• (10) $f(x, y) = \arcsin(xy)$,
• (11) $f(x, y) = \arccos \frac{y}{x}$,
(12) $f(x, y) = \sqrt{1 - |x| - |y|}$,
• (13) $f(x, y) = \ln \ln \ln |x - y|$,
(14) $f(x, y) = \dfrac{1}{y - x^3 + x^2}$,
2d • (15) $f(x, y) = \dfrac{1}{|\sin(x)| + |\sin(y)|}$.

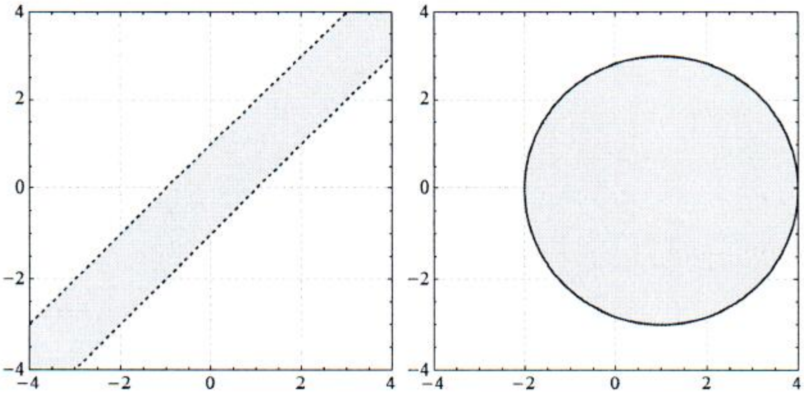
8.2. **Hladiny.** Nalezněte hladiny následujících funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pro které hodnoty $C \in \mathbb{R}$ jsou hladiny neprázdné množiny?

1a • (1) $f(x, y) = x + y - 4$,
1h • (2) $f(x, y) = \frac{x-1}{y-2}$,
(3) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 6$,
(4) $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 3$,
1g • (5) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 5$,
1f • (6) $f(x, y) = |x| + 2|y|$,
(7) $f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$,
(8) $f(x, y) = \sqrt{xy + 1}$.

(b) $H_f = (-\infty, 0\rangle$,

(6) (a) $D_f = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 9\}$ (kruh se středem v bodě $[1, 0]$ a poloměrem 3)

(b) $H_f = \langle 0, 3\rangle$,

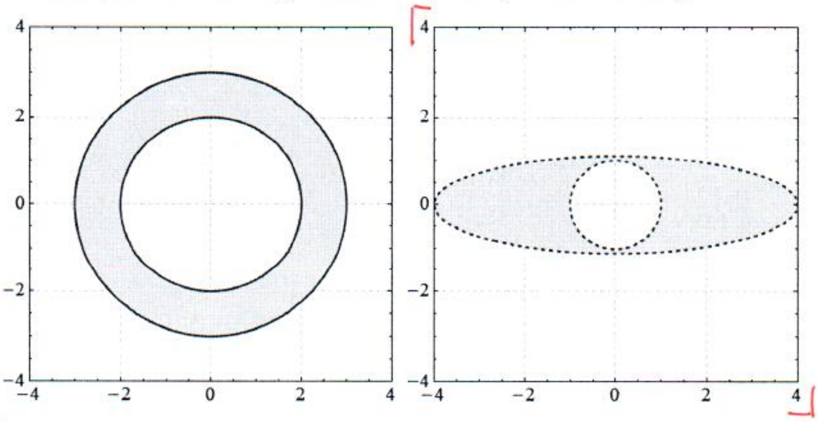


(7) (a) $D_f = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ (mezikruží se středem v $[0, 0]$ a poloměry hraničních kružnic 2 a 3),

(b) $H_f = \langle \sqrt{5}, \sqrt{10}\rangle$, (minima leží na krajních kružnicích, maxima nabývá funkce na kružnici s poloměrem $\sqrt{\frac{13}{2}}$)

(8) (a) $D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1 a x^2 + 16y^2 < 16\}$ (elipsa s a=16, b=1, bez kruhu s poloměrem jedna, vše bez okrajů.

$\ln(x^2+y^2-1)$
$+\ln(16-x^2-16y^2)$



(9) (a) $D_f = \{(x, y) : \sin x \sin y \geq 0\}$ (šachovnice tvořená políčky o délce stran π),

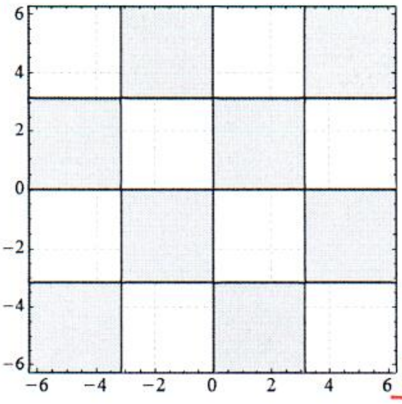
$\sqrt{\sin x \sin y}$

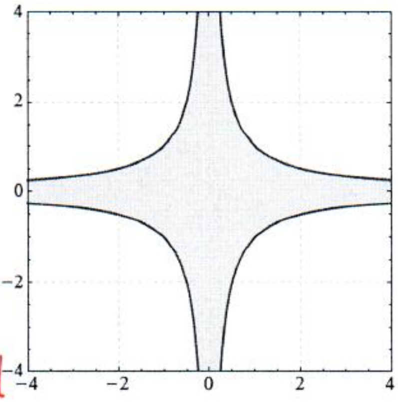
(b) $H_f = \langle 0, 1\rangle$,

(10) (a) $D_f = \{(x, y) : xy \in \langle -1, 1\rangle\}$ ("nekonečná hvězdička" omezená hyperbolami $\frac{1}{x}$ a $-\frac{1}{x}$)

(b) $H_f = \langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$,

$\sqrt{\sin x \sin y}$



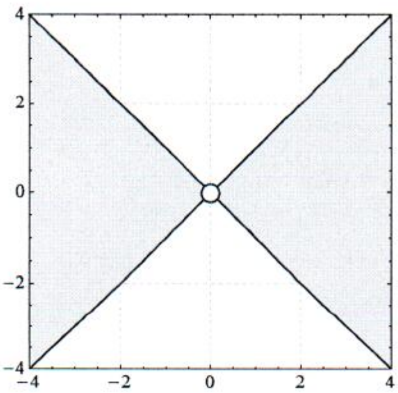


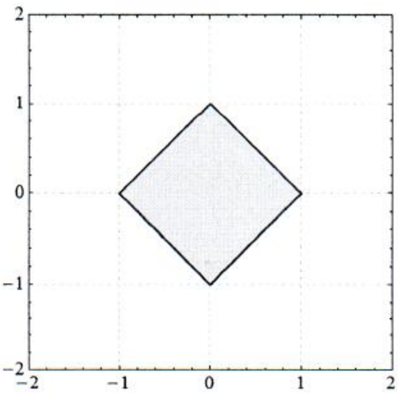
(11) (a) $D_f = \{(x,y) : x \neq 0 \text{ a } y \in \langle -|x|, |x| \rangle\}$ (plocha na a mezi přímkami $y = x$ a $y = -x$, bez počátku)

(b) $H_f = \langle 0, \pi \rangle$,

(12) (a) $D_f = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$ (vnitřek a hranice čtverce procházejícího body $\langle \pm 1, \pm 1 \rangle$)

(b) $H_f = \langle 0, 1 \rangle$,



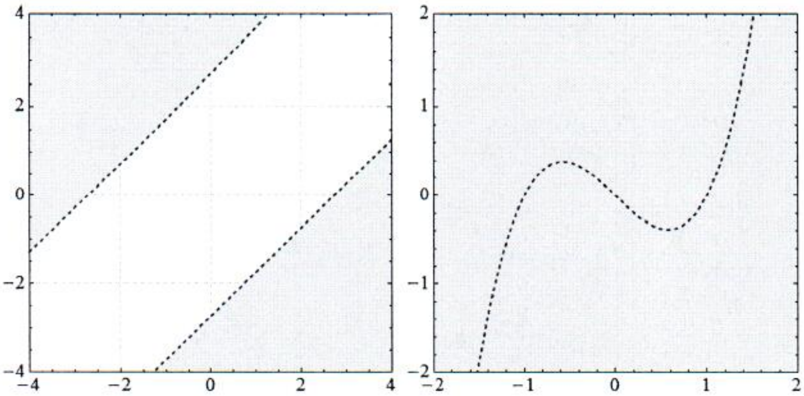


(13) (a) $D_f = \{(x,y) : |x - y| > e\}$ (doplněk k pásu mezi přímkami $y = x - e$ a $y = x + e$)

(b) $H_f = \mathbb{R}$,

(14) (a) $D_f = \{(x,y) : y \neq x^3 - x^2\}$ ($\mathbb{R}^2$ bez grafu funkce $y = x^3 - x^2$)

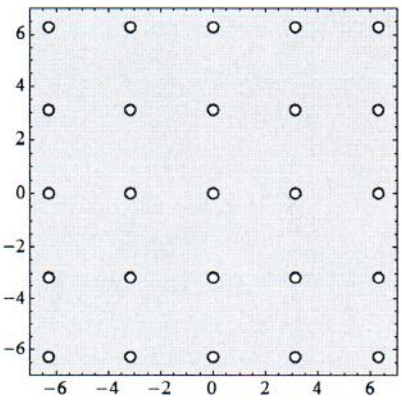
(b) $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,



(15) (a) $D_f = \{(x,y) : (x,y) \neq (m\pi, n\pi), m,n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{R}^2$ bez všech bodů, kde obě souřadnice jsou násobky π)

(b) $H_f = \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right)$.

$\frac{1}{|\sin x| + |\sin y)}$



8.2.

1a (1) přímky rovnoběžné s $y = -x$, $C \in \mathbb{R}$, $x+y-4$

1b (2) přímky procházející bodem $\langle 1, 2\rangle$, $C \in \mathbb{R}$,

$\frac{x-1}{y-2}$

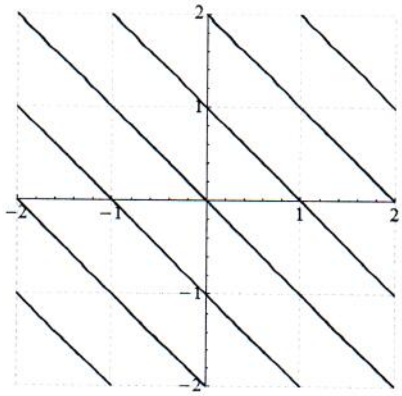
1a

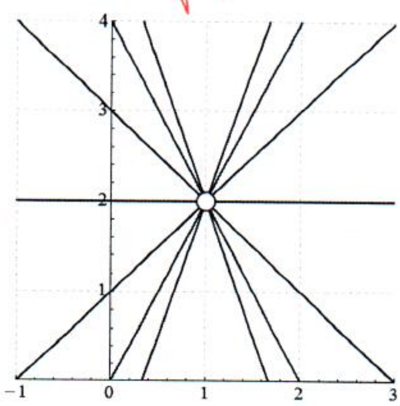
1h

$x+y-4$

$x-1$

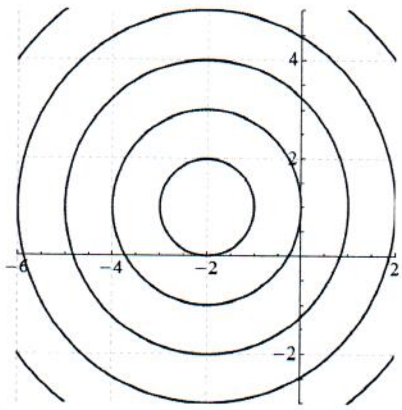
$y-2$

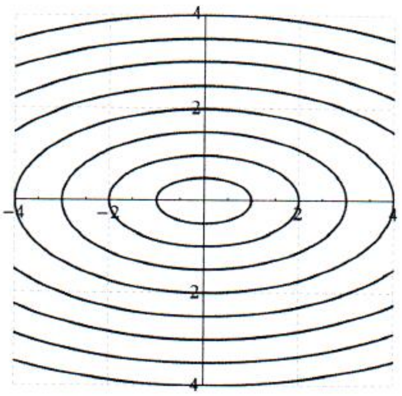




(3) kružnice se středem v bodě $\langle -2, 1 \rangle$, $C \geq 1$,

(4) elipsy se středem v počátku s dvakrát větší x-ovou poloosou, $C \geq -3$,



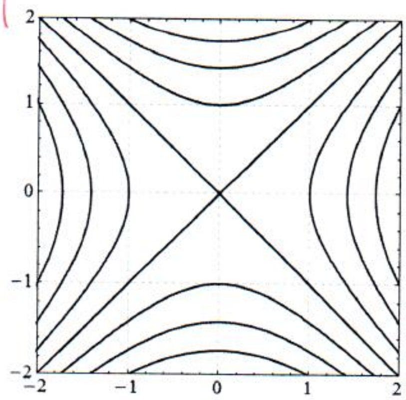


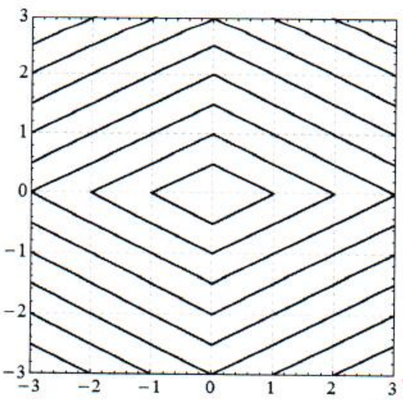
1g

1f

(5) hyperboly se středem v počátku (H_5 jsou dvě přímky), $C \in \mathbb{R}$, $x^2 - y^2 + 5$

(6) soustředné kosočtverce, $C \geq 0$. $|x|+2|y|$





je křivka, která reprezentuje množinu bodů se stejnou nadmořskou výškou.

Řešené úlohy

1e

Příklad 4.2.1. Určete definiční obor a nalezněte graf funkce

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

Řešení: Nejdříve určíme omezující podmínku na definiční obor. Druhá odmocnina je schopna působit pouze na nezáporná čísla. Tedy,

$$16 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - y^2 \geq -16 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4^2.$$

Definičním oborem je kruh se středem v počátku a poloměrem 4.

Nalezneme vrstevnice grafu. Budeme hledat řezy grafu funkce s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou xy (s **půdorysnou**), resp. průměty těchto řezů do půdorysny.

Poznámka

V následujícím textu budeme často ztotožňovat vrstevnici s jejím kolmým průmětem do roviny xy.

Klademe $z = k$, k je nějaká konstanta, nějaké reálné číslo. Např. pro hodnotu $k = 0$ dostáváme rovnici $z = 0$, což je rovnice roviny xy. Pro hodnotu $k = 1$ dostáváme rovnici $z = 1$, což je rovnice roviny, která je rovnoběžná s rovinou xy, a jejíž vzdálenost od roviny xy je rovna 1, atd.

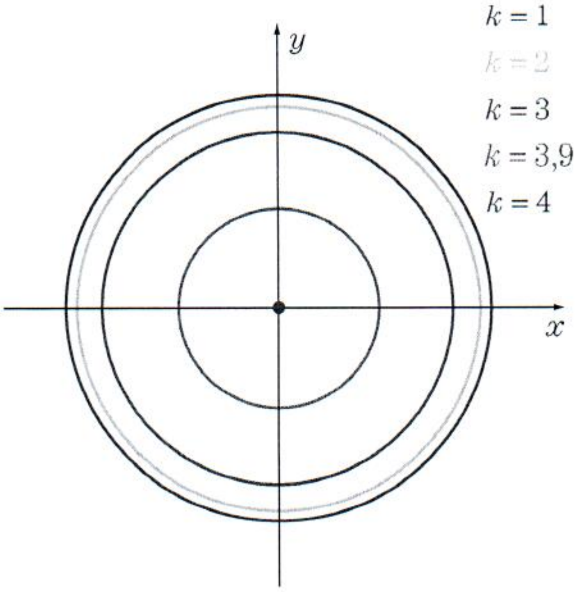
Pro $z = k$, $k \geq 0 \wedge k \leq 4$ dostáváme

$$k = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = 16 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16 - k^2.$$

Proč volíme $k \geq 0$? Číslo k dosazujeme za z a $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, druhá odmocnina z nezáporného čísla bude vždycky číslo nezáporné, hodnota z je nezáporná a tedy i číslo k musí být nezáporné. Navíc $k \leq 4$, protože k může nabývat pouze hodnot z intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. Pro $k > 4$ bude rozdíl na pravé straně rovnice $x^2 + y^2 = 16 - k^2$ záporný, kružnice se záporným poloměrem nemá smysl.

Vrstevnicemi budou kružnice se středem v počátku a s poloměry $\sqrt{16-k^2}$, $k \in \langle 0,4)$. Pro $k=4$ dostaneme tzv. degenerovanou kružnici s poloměrem 0, tj. bod. V tomto případě se jedná o počátek, bod o souřadnicích $[0,0]$.

1e



Obr. 4.2.1

Navíc budeme ještě hledat řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se zbývajícími souřadnicovými rovinami. Položme např. $x=k$. Hledáme řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou yz, tzv. **nárysnou**. Souřadnice x leží v intervalu $\langle 0,4\rangle$, proto konstanta $k \in \langle 0,4\rangle$,

$$z=\sqrt{16-k^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2=16-k^2-y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2+z^2=16-k^2.$$

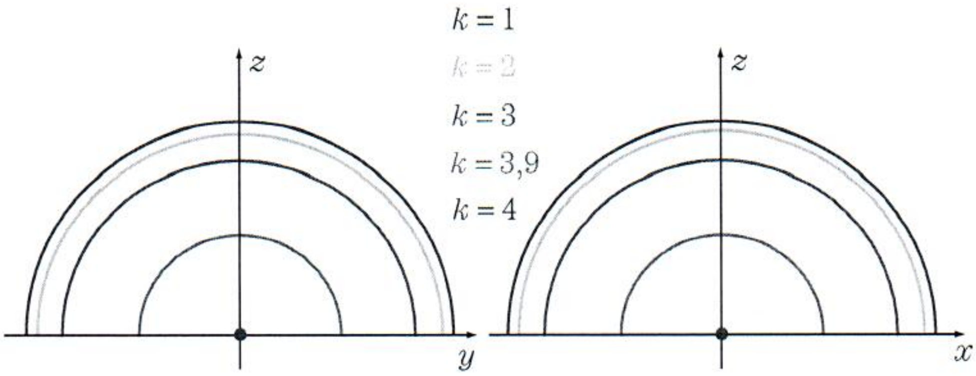
Protože $z \geq 0$, poslední rovnice představuje půlkružnice se středy v počátku a poloměry $\sqrt{16-k^2}$, pro hodnotu $k=4$ se jedná o bod $[0,0]$.

Zvolíme-li $y=k$, pak hledáme řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou xz, tzv. **bokorysnou**. Dostáváme analogickou posloupnost rovnic jako v předcházejícím případě,

$$z=\sqrt{16-x^2-k^2} \quad \Rightarrow \quad z^2=16-x^2-k^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+z^2=16-k^2.$$

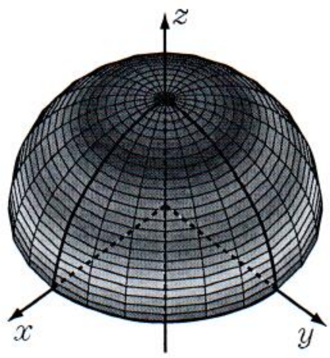
Řezy jsou půlkružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{16-k^2}$.

1e



Obr. 4.2.2

Nyní již máme dostatek informací pro celkovou představu o grafu této funkce. Grafem je polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem 4.



Obr. 4.2.3

(15) **Příklad 4.2.2.** Určete definiční obor a graf funkce $z = xy$.

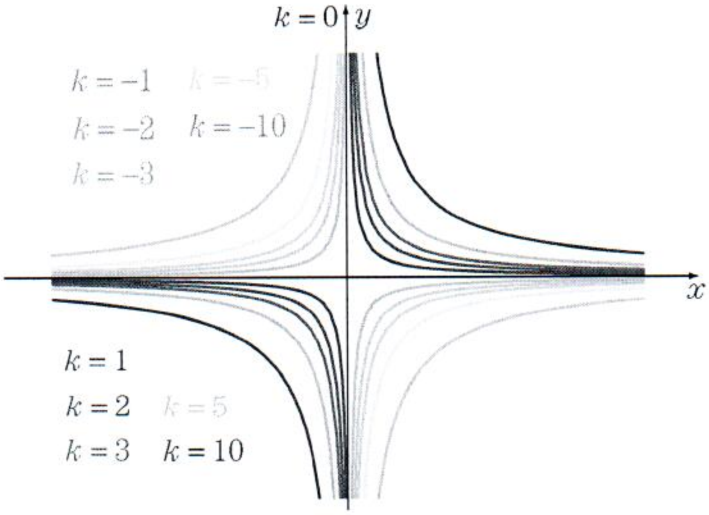
Řešení: Definičním oborem je celá množina $\mathbb{R}^2$. Podívejme se nyní postupně na jednotlivé řezy.

1. Pro $k \in \mathbb{R}$, $z = k$,

$$k = xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k}{x}.$$

Vrstevnicemi jsou pro $k \neq 0$ rovnoosé hyperboly a pro $k = 0$ je vrstevnice tvořená souřadnicovými osami, osou x i osou y.

15



Obr. 4.2.4

2. Pro $k \in \mathbb{R}$, $x = k$,

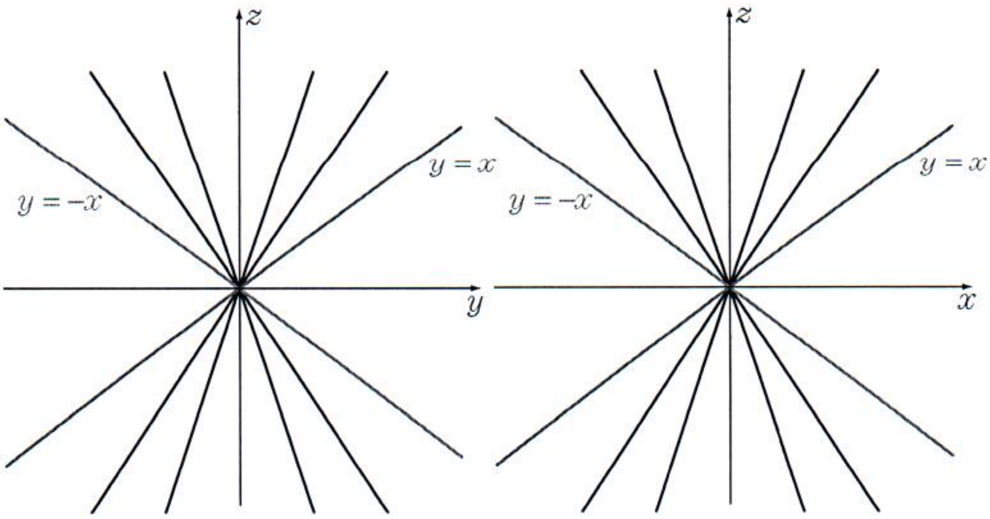
$$z = ky.$$

Řezy jsou přímky procházející počátkem.

3. Pro $k \in \mathbb{R}$, $y = k$,

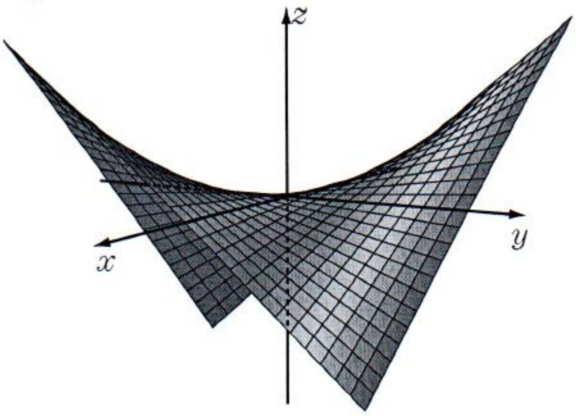
$$z = kx.$$

Řezy jsou přímky procházející počátkem.



Obr. 4.2.5

Jedná se o sedlovou plochu. Její grafické znázornění je poměrně obtížné,
1b nicméně přesto nám řezy poskytnou základní informaci o grafu zadané funkce. Graf zadané funkce je na Obr. 4.2.6



Obr. 4.2.6

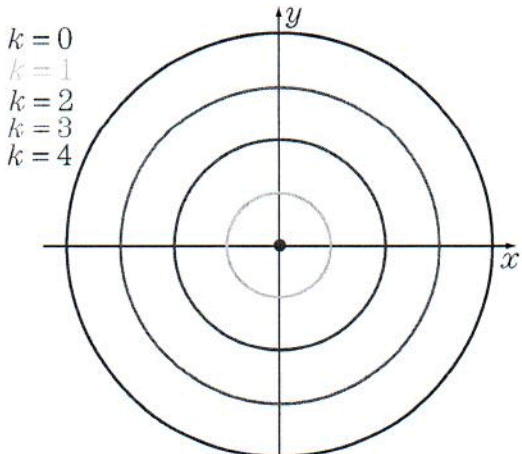
1a **Příklad 4.2.3.** Určete definiční obor a graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Řešení: Definičním oborem je celá množina $\mathbb{R}^2$. Součet v odmocnině bude nezáporný bez ohledu na to, co dosadíme za x resp. y. Hledáme řezy.

1. Pro $k \geq 0$, $z = k$,

$$k = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = x^2 + y^2.$$

Vrstevnicemi jsou kružnice se středem v počátku a poloměry k.



Obr. 4.2.7

2. Pro $k \in \mathbb{R}$, $x = k$,

$$z = \sqrt{k^2 + y^2} \;\Rightarrow\; z^2 = k^2 + y^2 \;\Rightarrow\; -y^2 + z^2 = k^2 \;\Rightarrow\; -\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1.$$

1d

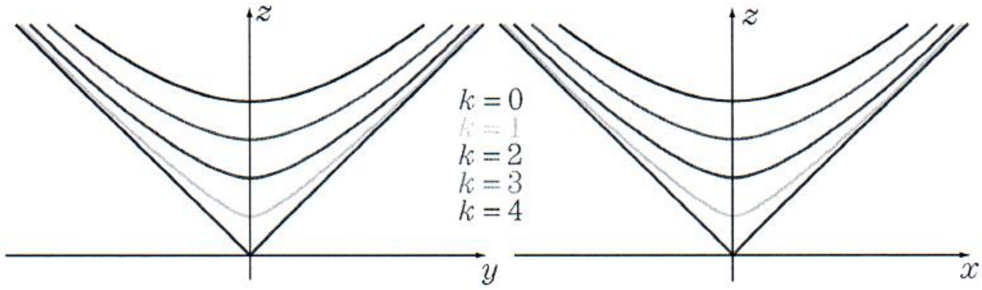
Pro pevně zvolené k je řezem jedno rameno rovnoosé hyperboly. Všimněme si, že pro k připouštíme i hodnotu 0. Ovšem v poslední rovnici bychom pak dělili nulou, což je nepřípustné. Poslední implikace pro $k = 0$ neplatí. V tomto případě je řezem dvojice polopřímek procházejících počátkem $[0, 0]$, tedy

$$z = \sqrt{y^2} \quad\Rightarrow\quad |z| = y \quad\Rightarrow\quad z = \pm y.$$

3. Pro $k \in \mathbb{R}$, $y = k$,

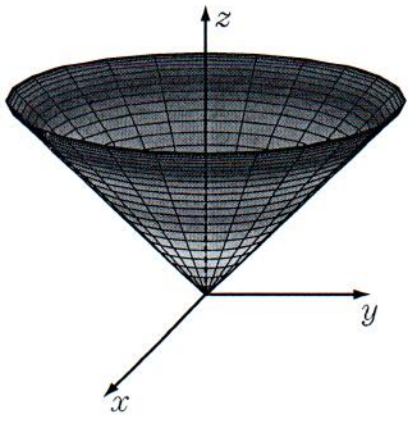
$$z = \sqrt{x^2 + k^2} \;\Rightarrow\; z^2 = x^2 + k^2 \;\Rightarrow\; -x^2 + z^2 = k^2 \;\Rightarrow\; -\frac{x^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1.$$

Pro řezy platí totéž, co již bylo řečeno v bodě 2.

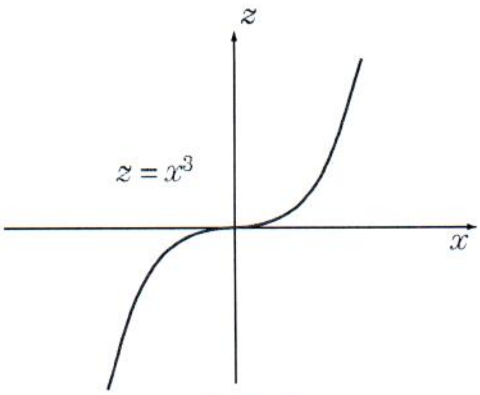


Obr. 4.2.8

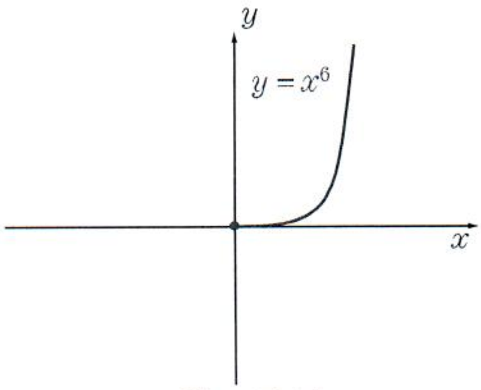
Grafem funkce je jednodílná kuželová plocha.



Obr. 4.2.9



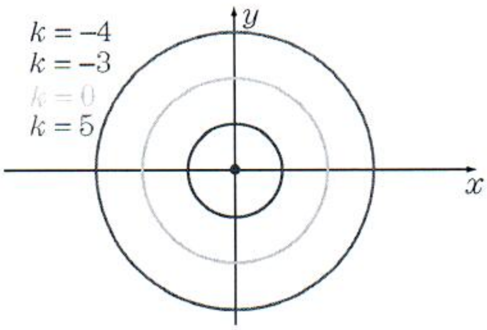
Obr. 4.2.12



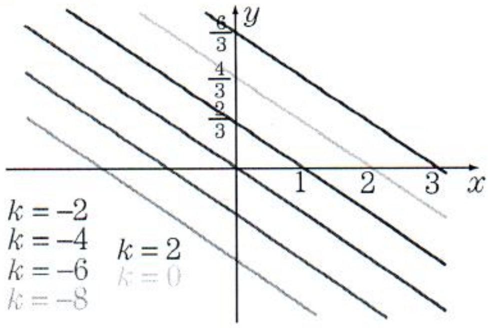
Obr. 4.2.13

3. $D_z = \mathbb{R}^2$, $k \geq -4$. Vrstevnice: $[0,0]$, $x^2 + y^2 = 4 + k$, Obr. 4.2.14.

4. $D_z = \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4+k}{3}$, Obr. 4.2.15.



Obr. 4.2.14



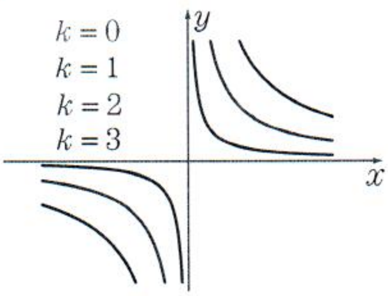
Obr. 4.2.15

$\sqrt{xy}$ **5.** $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 0\}$, $k \geq 0$. Vrstevnice: jedna z vrstevnic je tvořena oběma souřadnicovými osami ($y = 0$, $x = 0$) pro $k = 0$, ostatní vrstevnice mají

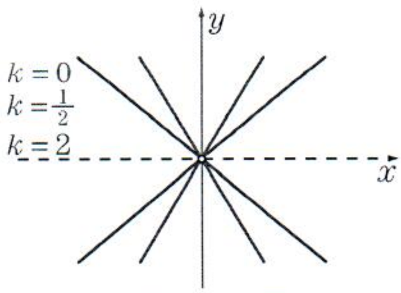
1c

rovnici $y = \frac{k^2}{x}$ pro $k > 0$, Obr. 4.2.16.

6. $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$, $k \geq 0$. Vrstevnice: $x = 0$ pro $k = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{k}}x$ pro $k > 0$. Ze všech vrstevnic vynecháváme bod $[0,0]$, protože neleží v definičním oboru zadané funkce, Obr. 4.2.17.



Obr. 4.2.16



Obr. 4.2.17

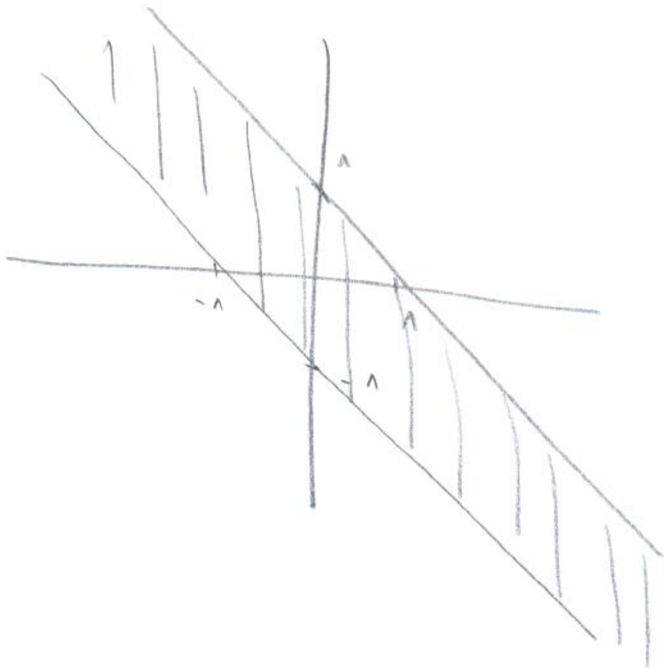
$$f(x,y) = \arcsin(x+y) + \arctan(x+y) + xy$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq x+y \leq 1$$

$$y \leq 1-x$$

$$-1-x \leq y$$



$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{|x|-|y|}\right)$$

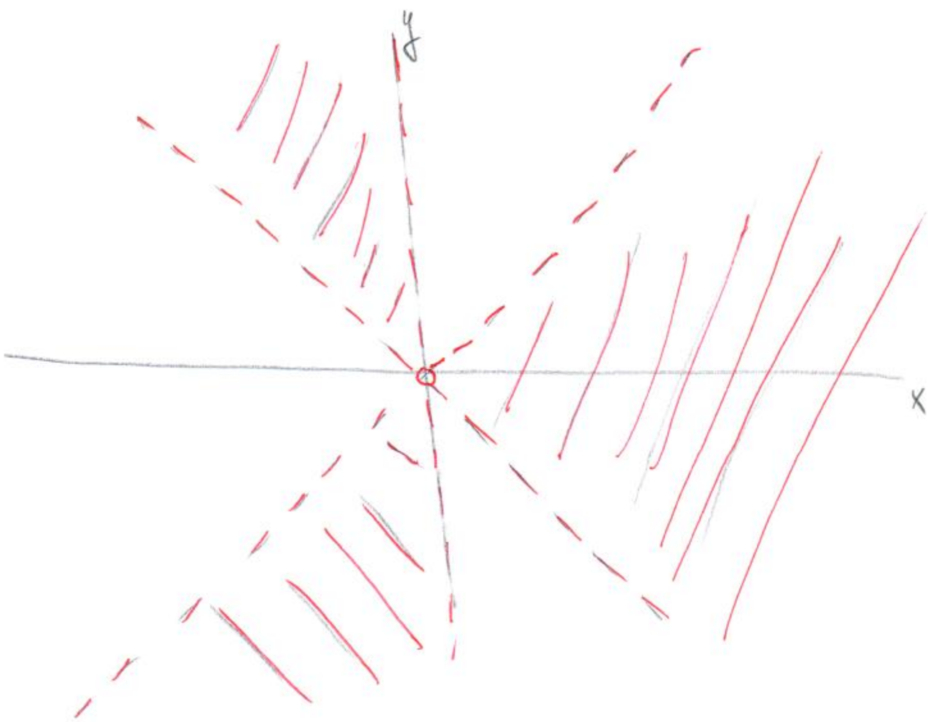
- $|x|-|y| \neq 0$ $\qquad$ $x \neq 0$

  $|x| \neq |y|$

- $$\frac{x}{|x|-|y|} > 0$$

$x > 0$ & $|x|-|y| > 0$ $\qquad$ $x < 0$ $\quad$ $|x|-|y| < 0$

$|x| > |y|$ $\qquad$ $|x| < |y|$



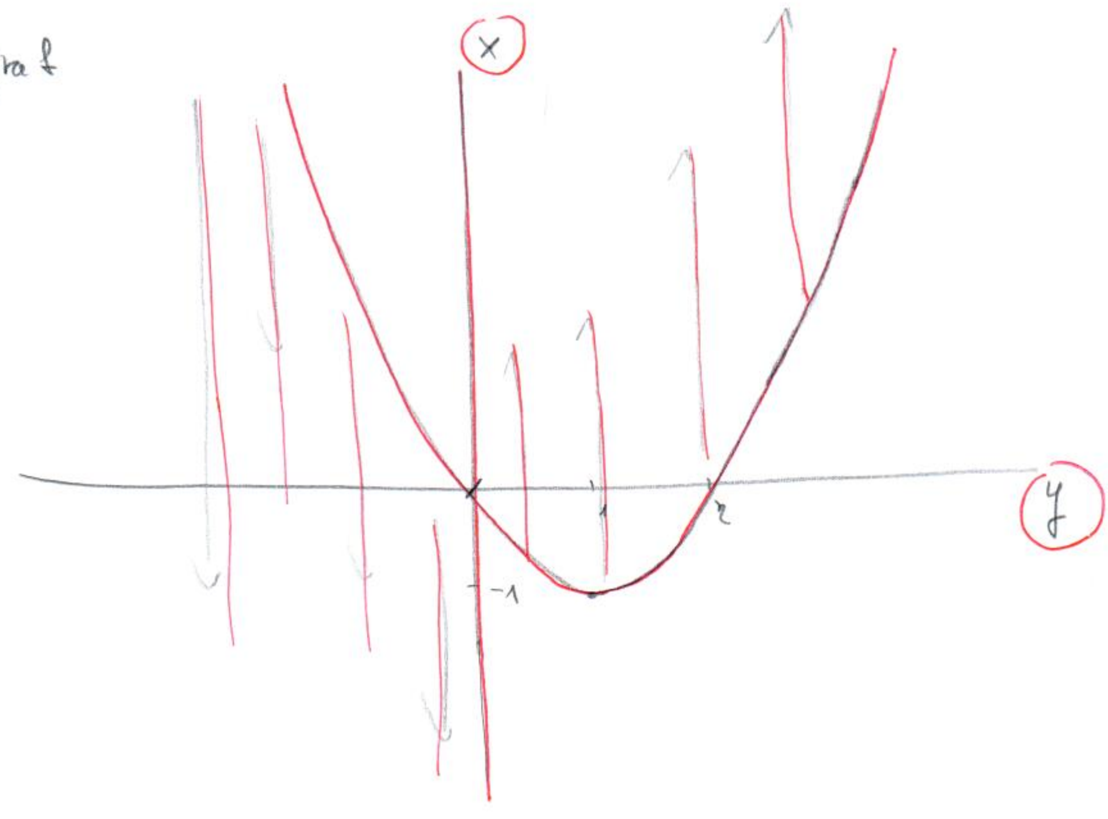
$f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

$y(x - y^2 + 2y) \geq 0$

- $y = 0 \quad x \in \mathbb{R}$
- $x = y^2 - 2y$
- $x \geq y^2 - 2y \;\&\; y \geq 0$ $\qquad$ $x \leq y^2 - 2y \;\&\; y \leq 0$

$x \geq (y-1)^2 - 1$ $\qquad$ $x \leq (y-1)^2 - 1$

graf



$f(x,y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}$

- $x(x+y) \geq 0$

(a) $x \geq 0 \quad (x+y) \geq 0$

$y \geq -x$

nebo

(b) $x \leq 0 \quad x+y \leq 0$

$y \leq -x$

(c) $x = 0 \quad y \in \mathbb{R}$

- $-1 \leq \sqrt{x(x+y)} \leq 1$

$x(x+y) \leq 1$

$x^2 + xy \leq 1$

$xy \leq 1 - x^2$

- $x = 0 \to y \in \mathbb{R}$
- $x > 0 \quad y \leq \frac{1}{x} - x$
- $x < 0 \quad y \geq \frac{1}{x} - x$