1. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $x \in X$, $r > 0$. *Otevřenou koulí* rozumíme množinu

$$B(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) < r\}$$

Uzavřenou koulí rozumíme množinu

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in X; \rho(x,y) \leq r\}$$

Definice 2. Nechť $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pak *ε-okolím bodu x* nazveme množinu

$$U(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; \rho(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

Pak *prstencovým ε-okolím bodu x* nazveme množinu $P(x_0,\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < \rho(x,x_0) < \varepsilon\}$.

Definice 3. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je *hromadný bod množiny M*, jestliže $\forall X(x_0) : X(x_0) \cap M \neq \emptyset$.

Řekneme, že množina M je *uzavřená*, jestliže všechny hromadné body patří do M.

Definice 4. Nechť $M \subset X$, $x \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *vnitřním bodem množiny M*, jestliže existuje $r > 0$ splňující $U(x,r) \subset M$.

Množina $M \subset X$ se nazývá *otevřená v (X,ρ)*, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Definice 5. Nechť $M \subset X$. Řekneme, že bod $x_0 \in X$ je *hraniční bod množiny M*, jestliže $\forall U(x_0) : U(x_0) \cap M \neq \emptyset$ a $U(x_0) \cap X \setminus M \neq \emptyset$. Množinu všech hraničních bodů nazýváme *hranice* a značíme ji ∂M.

Uzávěrem množiny M rozumíme množinu $\bar{M} = \{x \in X; \forall\varepsilon > 0 : U(x,\varepsilon) \cap M \neq \emptyset\}$.

Věta 6 (Vlastnosti otevřených množin)**.** (a) Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou otevřené v $(\mathbb{R}^n,\rho)$. Pak $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ je otevřená množina v $(\mathbb{R}^n,\rho)$.

(b) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nechť množiny G_i, $i = 1,\dots,m$, jsou otevřené v $(\mathbb{R}^n,\rho)$. Pak $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v $(\mathbb{R}^n,\rho)$.

Věta 7 (Vlastnosti uzavřených množin)**.** Nechť $(\mathbb{R}^n,\rho)$ je metrický prostor.

(a) Nechť $F \subset \mathbb{R}^n$. Potom F je uzavřená v $(\mathbb{R}^n,\rho)$, právě když $\mathbb{R}^n \setminus F$ je otevřená v $(\mathbb{R}^n,\rho)$.

(c) Nechť A je neprázdná množina indexů. Nechť množiny $F_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené v $(\mathbb{R}^n,\rho)$. Pak $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v $(\mathbb{R}^n,\rho)$.

(d) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Nechť množiny F_i, $i = 1,\dots,m$, jsou uzavřené v $(\mathbb{R}^n,\rho)$. Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v $(\mathbb{R}^n,\rho)$.

Příklady

1. Určete a zakreslete definiční obor a vrstevnice

   (a) $f(x,y) = x + y - 4$

   (b) $f(x,y) = xy$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$

   (f) $f(x,y) = |x| + 2|y|$

   (g) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 5$

   (h) $f(x,y) = \dfrac{x-1}{y-2}$

2. Určete a načrtněte definiční obor

   (a) $f(x,y) = \sqrt{y \sin x}$

   (b) $f(x,y,z) = \arcsin x + \arcsin z + \arcsin y$

   (c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \ln(16 - x^2 - 16y^2)$

   (d) $f(x,y) = \dfrac{1}{|\sin x| + |\sin y|}$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{\sin x \sin y}$

3. Určete definiční obor (příklady ze zkoušek)

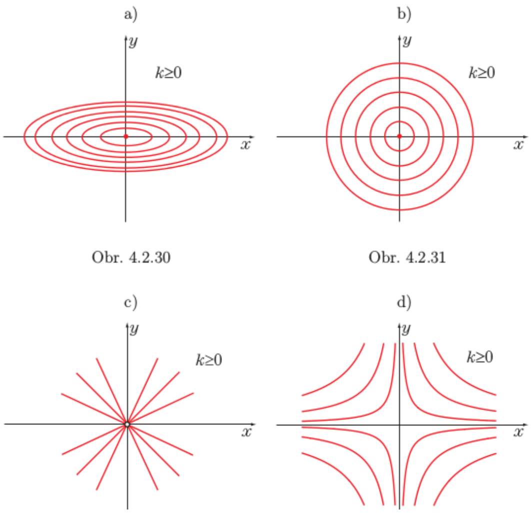
   (a) $f(x,y) = \arcsin\,(x+y) + \arctan\,(x+y) + xy$

   (b) $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{x}{|x| - |y|}\right)$

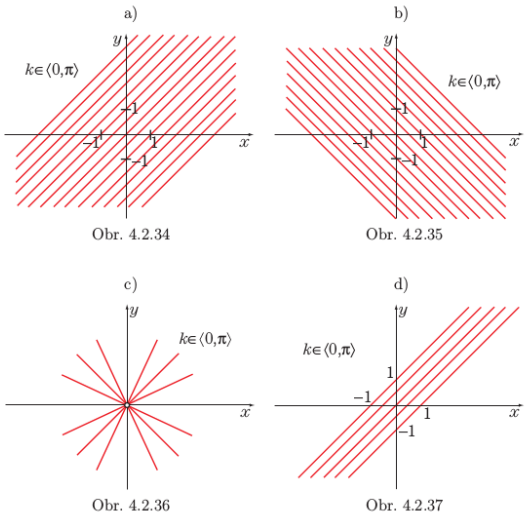
   (c) $f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}$

   (d) $f(x,y) = \arcsin\,\sqrt{x(x+y)}$

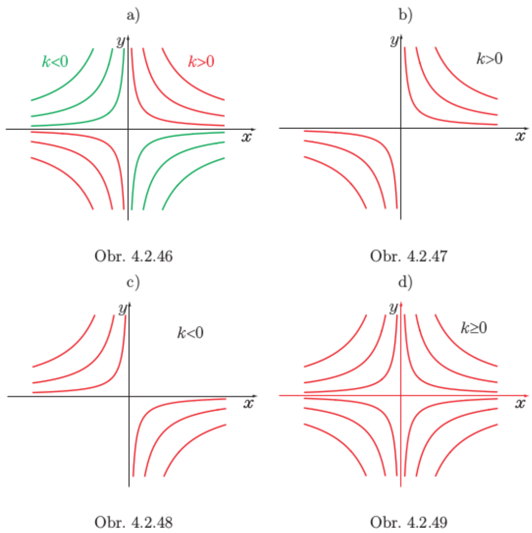
4. Najděte vrstevnice funkce (správně právě 1 možnost ze 4)



(a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$



(b) $f(x,y) = \operatorname{arccos}(x-y)$



(a) $f(x,y) = x^2y^2$

5. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici a vnitřek (v $\mathbb{R}^n$)

(a) $(0,1)$
(b) $[0,1)$
(c) $[0,1]$
(d) $(0,\infty)$
(e) $[0,\infty)$
(f) $(-\infty,\infty)$
(g) $\mathbb{N}$
(h) $\mathbb{Q}$
(i) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

6. Určete, zda je daná množina uzavřená, uzavřená, najděte hranici (v $\mathbb{R}^2$).