1.5.3 (operace odčítání a dělení). Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. **Rozdíl** čísel x a y je definován jako číslo $x + (-y)$ a značíme ho symbolem $x - y$. Pokud navíc $y \neq 0$, pak je **podíl** čísel x a y definován jako číslo $x \cdot y^{-1}$. Místo $x \cdot y^{-1}$ používáme také symbol $\frac{x}{y}$ nebo (méně často) $x : y$ či x/y.

1.5.4. Z vlastností (1)-(9) vyplývají všechna obvyklá pravidla pro počítání s reálnými čísly. Jako příklad odvodíme následující čtyři pravidla. Důkazy dalších početních pravidel jsou obsaženy v Dodatku B.

1.5.5. Věta. Pro reálná čísla platí následující tvrzení:

3 (a) $\forall x \in \mathbb{R}: -(-x) = x$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: (x^{-1})^{-1} = x$,
(c) $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \cdot x = 0$.
(d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: (x \leq y \wedge z \geq 0) \Rightarrow xz \leq yz$.

Důkaz. (a) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom $x + (-x) = 0$ podle (4). Pak díky (2) máme $(-x) + x = 0$, a tedy x je opačný prvek k prvku $-x$. Proto platí $-(-x) = x$.
(b) Nechť $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom $x \cdot x^{-1} = 1$ podle (8). Pak díky (6) máme $x^{-1} \cdot x = 1$, a tedy x je inverzní prvek k prvku x^{-1}. Proto platí $(x^{-1})^{-1} = x$.
(c) Nechť $x \in \mathbb{R}$. Postupným použitím (7), (3), (9) a znovu (7) dostaneme

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $x = x + 0 \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme

$$x + (-x) = (x + 0 \cdot x) + (-x).$$

Odtud pomocí (4) použité na levou stranu rovnosti a (1) a (2) použité na pravou stranu obdržíme

$$0 = 0 \cdot x + \big(x + (-x)\big).$$

Díky vlastnostem (4) a (3) odtud dostáváme dokazovaný vztah $0 \cdot x = 0$.

(d) Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z splňují $x \leq y$ a $z \geq 0$. Přičtením prvku $-x$ k levé a pravé straně nerovnosti $x \leq y$ dostaneme $0 \leq y - x$. Potom podle vlastnosti (3) v 1.5.7 obdržíme $0 \leq (y - x)z = yz - xz$. Přičtením prvku xz k levé a pravé straně poslední nerovnosti dostaneme požadovanou nerovnost. ■

1.5.6. Poznámka. Někdy hovoříme o prvcích množiny $\mathbb{R}$ jako o bodech a o prvku 0 jako o počátku.

1.5.7 (**vztah uspořádání a operací sčítání a násobení**). (1) Relace $\leq$ je lineárním uspořádáním na množině $\mathbb{R}$.
(2) Pro každé $x, y, z \in \mathbb{R}$ splňující $x \leq y$ platí

$$x + z \leq y + z.$$

sčítání a násobení spolu s uspořádáním. Pokud bychom zvolili nějaký alternativní přístup a sestrojili množinu $\mathbb{R}^\diamond$ spolu s operacemi $+^\diamond, \cdot^\diamond$ a uspořádáním $\leq^\diamond$, které by splňovaly vlastnosti I–III, přičemž místo $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ bychom uvažovali $(\mathbb{R}^\diamond, +^\diamond, \cdot^\diamond, \leq^\diamond)$, pak podle předchozí věty existuje zobrazení φ, které je nejenom bijekcí množiny $\mathbb{R}$ na množinu $\mathbb{R}^\diamond$, ale také operace a uspořádání v $\mathbb{R}$ převádí na příslušné operace a uspořádání v $\mathbb{R}^\diamond$.

B.1.43. Věta.

1 (a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,
2 (b) $\forall x \in \mathbb{R}\colon -x = (-1) \cdot x$,
4 (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,
(d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$,
6 (e) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,
7 (f) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Důkaz. (a) Platí

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $x = x + 0 \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme dokazované tvrzení.

(b) Platí

$$0 = 0 \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-1) \cdot x.$$

Přičteme-li v rovnosti $0 = x + (-1) \cdot x$ k oběma stranám číslo $-x$, dostaneme dokazované tvrzení.

(c) Pokud $x = 0$, jsme hotovi. Pokud $x \neq 0$, pak existuje $x^{-1} \in \mathbb{R}$ a platí

$$0 = x^{-1} \cdot 0 = x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y.$$

(d) Použitím komutativity a asociativity násobení dostaneme

$$x^n \cdot (x^{-1})^n = x^n \cdot (\underbrace{x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n\text{-krát}}) = \underbrace{(x \cdot x^{-1}) \cdots (x \cdot x^{-1})}_{n\text{-krát}} = 1 \cdots 1 = 1.$$

(e) Z poslední vlastnosti ve druhé skupině dostáváme, že $xy \geq 0$. Podle (c) ovšem vidíme, že $xy \neq 0$, jinak by totiž bylo x nebo y rovno 0. Dohromady pak máme $xy > 0$.

(f) Pokud $n = 1$, je tvrzení zřejmé. V případě $n > 1$ můžeme psát

$$y^n - x^n = (y - x) \cdot (y^{n-1} + y^{n-2}x + \cdots + yx^{n-2} + x^{n-1}).$$

Pokud $y > x$, pak oba uzávorkované výrazy jsou kladná čísla, a proto platí $0 < y^n - x^n$, neboli $x^n < y^n$.

Nechť nyní $y^n > x^n$. Pokud by platilo $y = x$, pak také $y^n = x^n$, což je spor. V případě, že $y < x$, dostaneme z již dokázaného $y^n < x^n$, což je opět spor. ∎

(5) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

chceme ukázat, že

$$xy \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = 1$$

komutativita $\quad x \cdot \frac{1}{x} \cdot y \cdot \frac{1}{y} = 1$

vlastnost 1 $\quad 1 \cdot 1 = 1$

(8) $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$

přičteme opačný prvek

$-x + x \geq -x \quad$ (z u_1)

$0 \geq -x$

(9) $x^2 \geq 0$

- $x = 0$ pak $0 \cdot 0 = 0 \geq 0$
- $x \geq 0$ pak $\underset{u_2}{x \cdot x \geq x \cdot 0} \underset{\text{vlastnosti } 0}{= 0}$

- $(-1)\cdot(-1) = 1$ (· neb

$0 = 1 + (-1) \quad | \cdot (-1)$

$0 \cdot (-1) = (-1)\cdot(1 + (-1))$

$0 = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \quad | + (-1)\cdot(-1)$

$0 = -1 + (-1)\cdot(-1) \quad | + 1$

$1 = (-1)\cdot(-1)$

pak pro $x \leq 0$ $\quad 0 \leq -x$

pak

$-x \cdot 0 \leq (-x)\cdot(-x)$

$0 \leq (-1)\cdot x \cdot (-1)\cdot x$

$0 \leq 1 \cdot x^2$

$0 \leq x^2$

(10) $1 \geq 0$

$1 \cdot 1 \geq 0 \quad (z\,(a))$

$1 \geq 0$

$1 \neq 0 \to$ z definice $\mathbb{R}$

(B) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$a \cdot \frac{1}{b} \cdot c \cdot \frac{1}{d} = (a \cdot c) \cdot \frac{1}{bd}$

viz (5)

$a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}$

(C) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

$a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{d} = a \cdot d \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{1}{b} + c \cdot b \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\left(a \cdot d + b \cdot c\right)$

$= \frac{1}{bd}\left(ad + bc\right) = \frac{ad + bc}{bd}$

viz (5)

1.6.23. Poznámka. Poznamenejme, že prázdná množina je intervalem, neboť $(a,a) = \emptyset$ pro každé $a \in \mathbb{R}$. Také každá jednoprvková podmnožina $\mathbb{R}$ je intervalem, neboť $[a,a] = \{a\}$ pro každé $a \in \mathbb{R}$.

Následující lemma udává užitečnou charakterizaci intervalu. Chceme-li ukázat, že jistá množina je intervalem, stačí ověřit podmínku ze znění lemmatu, která říká, že množina s každými dvěma svými body x a y obsahuje i všechny body mezi mezi x a y. Není tedy třeba hledat příslušné krajní body intervalu. Lemma použijeme například v důkazech Vět 1.6.30 a 4.3.6.

1.6.24. Lemma. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Množina M je interval právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in M \ \forall z \in \mathbb{R}: (x < z < y \Rightarrow z \in M). \tag{1.12}$$

Řada matematických vět má tvar ekvivalence. Jejich důkaz často vedeme tak, že dokážeme postupně dvě implikace. Pro zjednodušení a zpřehlednění zápisu budeme občas používat symboly $\Rightarrow$ a $\Leftarrow$, které uvedou příslušné části důkazu.

Důkaz. $\Rightarrow$ Předpokládejme, že $M = (a,b)$, kde $a,b \in \mathbb{R}$. Pro ověření podmínky (1.12) vezměme $x, y \in M$ a $z \in \mathbb{R}$ takové, že $x < z < y$. Potom platí $a < x < z < y < b$, a tedy $z \in M$. Tím je podmínka (1.12) po uvedený typ intervalu ověřena. Pro ostatní typy intervalů je ověření obdobné.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že množina M splňuje (1.12). Pokud $M = \emptyset$, pak je tvrzení zřejmé. Není-li M omezená zdola ani shora, pak $M = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Vezmeme-li totiž libovolné číslo $z \in \mathbb{R}$, pak existuje $x \in M$, $x < z$ (neboť M není zdola omezená) a také existuje $y \in M$, $y > z$ (protože M není shora omezená). Podle předpokladu tedy platí $z \in M$.

Je-li M omezená a neprázdná, pak klademe $G = \sup M$ a $g = \inf M$. Platí $(g, G) \subset M$. Je-li totiž $z \in (g, G)$, pak podle definice infima existuje takové $x \in M$, že $x < z$, podobně podle definice suprema existuje $y \in M$, $y > z$. Podle našeho předpokladu je tedy $z \in M$. Dále je $M \subset [g, G]$, neboť g je dolní závorou M a G je horní závorou M. Množina M je tedy interval s krajními body g a G, přičemž každý z nich může (ale nemusí) patřit do M.

V ostatních případech, kdy je M omezená pouze zdola a kdy je M omezená pouze shora, lze tvrzení dokázat obdobně. ■

1.6.25. Věta. Nechť $n, m \in \mathbb{Z}$, $n < m$. Pak $m \geq n + 1$.

Důkaz. Provedeme přímý důkaz. Jelikož $n < m$, je $m - n$ kladné celé číslo. Tedy $m - n$ je přirozené číslo, a proto $m - n \geq 1$. Tím je tvrzení dokázáno. ■

1.6.26. Věta (existence celé části). Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq x < k + 1$.

je tedy „na“. Pokud pro $x, y \in B$ platí $f^{-1}(x) = f^{-1}(y)$, potom $x = f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(y)) = y$, a zobrazení f^{-1} je tedy prosté. Dostáváme tak, že zobrazení f^{-1} je bijekce, a proto má množina A stejnou mohutnost jako množina B, tj. $B \approx A$.

(c) Podle předpokladu existuje bijekce f množiny A na množinu B a bijekce g množiny B na množinu C. Složené zobrazení $g \circ f$ je dobře definováno na množině A a má hodnoty v množině C. Pokud $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, pak $f(x) = f(y)$, neboť g je prosté. Ze vztahu $f(x) = f(y)$, pak plyne $x = y$, neboť f je prosté. To znamená, že zobrazení $g \circ f$ je prosté. Pro každý prvek $c \in C$ existuje prvek $b \in B$ takový, že $g(b) = c$, neboť g je „na“. Pro prvek b existuje prvek $a \in A$ takový, že $f(a) = b$, neboť f je „na“. Potom platí $g \circ f(a) = g(f(a)) = g(b) = c$. Zobrazení $g \circ f$ je tedy „na“. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

1.7.5. Věta (Cantorova[5]-Bernsteinova[6] věta). Nechť X a Y jsou množiny splňující $X \preceq Y$ a zároveň $Y \preceq X$. Pak X a Y mají stejnou mohutnost.

K důkazu Cantorovy-Bernsteinovy věty použijeme následující lemma.

1.7.6. Lemma. Nechť X je množina a $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ je zobrazení splňujcící podmínku

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X): A \subset B \Rightarrow H(A) \subset H(B). \tag{1.13}$$

Potom existuje $C \subset X$ takové, že $H(C) = C$.

Důkaz. Definujme $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{P}(X);\ A \subset H(A)\}$. Ukážeme, že $C = \bigcup \mathcal{C}$ je hledanou množinou. Zřejmě platí $C \subset X$. Pokud $A \in \mathcal{C}$, potom $A \subset C$ podle definice $\mathcal{C}$. Díky (1.13) pak platí $H(A) \subset H(C)$. Dohromady tedy máme $A \subset H(A)$. Z této úvahy a definice C dostáváme $C \subset H(C)$. Nyní znovu použijeme (1.13) pro dvojici množin C a $H(C)$ a dostaneme $H(C) \subset H\big(H(C)\big)$. To znamená, že $H(C) \in \mathcal{C}$, a tedy $H(C) \subset C$. Tím je rovnost $H(C) = C$ dokázána. ∎

Důkaz Věty 1.7.5. Podle předpokladu věty existují prostá zobrazení $f: X \to Y$ a $g: Y \to X$. Definujme zobrazení $H: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ předpisem

$$H(A) = X \setminus g\big(Y \setminus f(A)\big).$$

Pokud $U \subset V \subset X$, potom $f(U) \subset f(V)$, a tedy také $Y \setminus f(V) \subset Y \setminus f(U)$. Odtud již snadno odvodíme inkluzi $H(U) \subset H(V)$. Zobrazení H tedy splňuje předpoklady Lemmatu 1.7.6, s pomocí kterého nalezneme množinu

[5] Georg Cantor (1845-1918)
[6] Felix Bernstein (1878-1956)

$k_0 \in \{1, \dots, m+1\}$ takové, že $\varphi(k_0) = n$. Definujme pomocné zobrazení $\psi\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n-1\}$ předpisem

$$\psi(k) = \begin{cases} \varphi(k), & \text{pokud } k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k_0\}, \\ \varphi(m+1), & \text{pokud } k = k_0 \in \{1, \dots, m\}. \end{cases}$$

Zobrazení ψ je dobře definované s hodnotami v množině $\{1, \dots, n-1\}$. Ověřme, že jde o bijekci množiny $\{1, \dots, m\}$ na množinu $\{1, \dots, n-1\}$. Zobrazení je „na", neboť obor hodnot obsahuje všechny prvky množiny $\{1, \dots, n\} \setminus \{\varphi(k_0)\} = \{1, \dots, n-1\}$. Předpokládejme nyní, že $\psi(k) = \psi(k')$. Pokud $k = k_0$ musí být díky prostotě φ také $k' = k_0 = k$. Pokud $k \neq k_0$, pak díky prostotě φ musí být $k' \neq k_0$. Potom ale platí $\psi(k) = \varphi(k) = \varphi(k') = \psi(k')$. Odtud plyne $k = k'$. Zobrazení ψ je tedy prosté.

Máme tedy $\{1, \dots, n-1\} \approx \{1, \dots, m\}$. Podle indukčního předpokladu dostáváme $n - 1 = m$, a tedy $n = m + 1$. ∎

1.7.10. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak je toto n určeno podle Lemmatu 1.7.9 jednoznačně. Toto pozorování je důležité pro korektnost následující definice.

1.7.11. Definice. Pokud je množina X prázdná, pak je počet jejích prvků roven 0. Pokud $X \approx \{1, \dots, n\}$ pro jisté $n \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že X má n prvků. Počet prvků konečné množiny X značíme $|X|$.

1.7.12. Poznámka. S pomocí Věty 1.7.4 dostáváme, že dvě konečné množiny X, Y mají stejnou mohutnost právě tehdy, když $|X| = |Y|$.

1.7.13. Věta. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je konečná množina. Potom je A omezená. Je-li navíc A neprázdná, pak existuje její maximum a minimum.

Důkaz. Je-li A prázdná, pak je zřejmě omezená, neboť každé $x \in \mathbb{R}$ je zároveň horní i dolní závorou množiny A.

Nechť je A neprázdná. V tomto případě provedeme důkaz matematickou indukcí podle počtu jejích prvků. Je-li A jednoprvková, je tvrzení zřejmé. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou množinu o n prvcích. Nechť A je množina o $n+1$ prvcích, tj. existuje bijekce $\varphi\colon \{1, \dots, n+1\} \to A$. Položme $B = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Pak $B \subset \mathbb{R}$ má n prvků, a tedy je dle indukčního předpokladu omezená a existuje její maximum G' a minimum g'. Položme

$$g = \min\{\varphi(n+1), g'\}, \quad G = \max\{\varphi(n+1), G'\}.$$

Čísla g a G jsou dobře definovaná dle Příkladu 1.6.20. Dále platí

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}\colon g \leq \varphi(i) \leq G.$$