Příklad 25.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2}.$$

Řešení.

Z čitatele i jmenovatele vytkneme nejrychleji rostoucí člen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n+(2n+\sin 4n)^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(2n)^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{(2n)^2}+(1+\frac{\sin 4n}{2n})^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{4n^2}+(1+\frac{\sin 4n}{2n})^2}.$$

Až potud jsme prováděli pouze algebraické úpravy.

Nyní si uvědomme, že:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sin 2n)\cdot\frac{1}{n} = 0$, protože $(\sin 2n)$ je omezená posloupnost a $\frac{1}{n}\to 0$ pro $n\to\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos(3n)}{4n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sin 3n)\cdot\frac{1}{4n^2} = 0$ z téhož důvodu, protože $(\cos 3n)$ je omezená posloupnost a $\frac{1}{4n^2}\to 0$ pro $n\to\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin(4n)}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sin 4n)\cdot\frac{1}{2n} = 0$ opět z téhož důvodu, protože $(\sin 4n)$ je omezená posloupnost a $\frac{1}{2n}\to 0$ pro $n\to\infty$. Z toho pak podle věty o aritmetice limit vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sin 4n}{2n}\right)^2 = (1+0)^2 = 1.$$

Pokud tedy opakovaně použijeme větu o aritmetice limit, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{4n^2}+(1+\frac{\sin 4n}{2n})^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+0+0}{0+(1+0)^2} = \frac{1}{2}.$$

2:50, 2:57

Příklad 26.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx], \qquad [kx] \text{ označuje dolní celou část.}$$

Řešení.

Protože $kx - 1 \leq [kx] \leq kx$, máme

$$\sum_{k=1}^{n}[kx] \leq \sum_{k=1}^{n} kx = x\frac{n(n+1)}{2} = x\frac{n^2+n)}{2}$$

a

$$\sum_{k=1}^{n}[kx] \geq \sum_{k=1}^{n}(kx-1) = x\frac{n(n+1)}{2} - n = x\frac{n^2+n)}{2} - n$$

Tudíž máme po rozšíření $\frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx] \leq x\frac{n^2+n}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}x$$

a naopak také

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx] \geq x\frac{n^2+n}{2n^2} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}x - 0 = \frac{1}{2}x.$$

Podle věty o dvou policajtech tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx] = \frac{1}{2}x.$$

2:58, 3:08

Příklad 27.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right).$$

Řešení.

Rozšířením s pomocí vzorce $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n^2}}.$$

Nyní vytkneme nejrychleji rostoucí člen ze jmenovatele.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{n^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2} + \sqrt[3]{1+1/n} + 1}.$$

Protože

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{(1+1/n)^2} = \sqrt[3]{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^2} = \sqrt[3]{(1+0)^2} = \sqrt[3]{1} = 1$ podle tvrzení, díky kterému lze zaměnit pořadí k-té odmocniny a limity za předpokladu, že limita uvnitř je vlastní, nenulová a výsledný výraz dává smysl;[1]
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{(1+1/n)} = 1$ díky stejnému argumentu jako výše,

dostáváme díky opakovanému použití věty o aritmetice limit, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(1+1/n)^2} + \sqrt[3]{1+1/n} + 1} =$$

$$0 \cdot \frac{1}{1+1+1} = 0.$$

[1]) Toto tvrzení se obyčejně dokazuje zvlášť, v obecnosti je důsledkem spojitosti odmocniny v celém svém definičním oboru. Tvrzení platí také, pokud limita je nulová, v případě sudé odmocniny je však zapotřebí pohlídat, že až na konečně mnoho výjimek jsou všechny členy posloupnosti uvnitř nezáporné.

3:10, 3:25

Příklad 28.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}.$$

Řešení.

Pokud porovnáme řády jednotlivých členů v čitateli a jmenovateli, zjistíme:

- člen $\sqrt[4]{n^5+2}$ je řádu $n^{5/4}$,
- člen $\sqrt[3]{n^2+1}$ je řádu $n^{2/3}$,
- člen $\sqrt[5]{n^4+2}$ je řádu $n^{4/5}$,
- člen $\sqrt{n^3+1}$ je řádu $n^{3/2}$.

Protože $3/2$ je nejvyšší řád ve jmenovateli a $5/4$ nejvyšší řád v čitateli a $3/2 > 5/4$, bude výsledkem nula. Formálně to lze dokázat například takto: vytkneme ze jmenovatele $n^{3/2}$ a z čitatele $n^{5/4}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/4}}{n^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1+2/n^5}-\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^{15/4}}+\frac{1}{n^{15/4}}}}{\sqrt[5]{\frac{n^4}{n^{15/2}}+\frac{2}{n^{15/2}}}-\sqrt{1+1/n^3}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3/2-5/4}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1+2/n^5}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^{15/4-2}}+\frac{1}{n^{15/4}}}}{\sqrt[5]{\frac{1}{n^{15/2-4}}+\frac{2}{n^{15/2}}}-\sqrt{1+1/n^3}} =$$

a nyní, protože ve všech exponentech u n jsou kladná čísla a $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$ pro $n \to \infty$, pokud α je libovolné kladné číslo, máme

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt[4]{1+0}-\sqrt[3]{0+0}}{\sqrt[5]{0+0}-\sqrt{1+0}} = 0 \cdot \frac{1+0}{0-1} = 0.$$

Při tom jsme použili:

- větu o aritmetice limit,
- fakt, že lze provést limitění pod odmocninou (viz též předchozí příklad) za předpokladu, že výsledek je reálné číslo, které je

— nenulové nebo

— nulové, přičemž všechny členy posloupnosti pod (sudou) odmocninou jsou nezáporné, což je zde splněno.

3:26, 3:41, používám copy paste!

Příklad 29.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right).$$

Řešení.

Odmocniny převedeme na stejný základ (nejmenší společný násobek je zde $2\cdot 3 = 6$)

$$\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1} =$$
$$\sqrt[6]{(n^2+2)^3} - \sqrt[6]{(n^3+1)^2}$$

a použijeme rozšíření s pomocí vztahu

$$A^6 - B^6 = (A-B)(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5).$$

Pokud přidáme ještě doposud opomíjené n před závorkou, získáme, že

$$n\left(\sqrt[6]{(n^2+2)^3} - \sqrt[6]{(n^3+1)^2}\right) =$$

$$\frac{n((n^2+2)^3-(n^3+1)^2)}{\sqrt[6]{(n^2+2)^{15}}+\sqrt[6]{(n^2+2)^{12}}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^2}+\sqrt[6]{(n^2+2)^9}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^4}+\sqrt[6]{(n^2+2)^6}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^6}+\sqrt[6]{(n^2+2)^3}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^8}+\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}}} =$$

$$\frac{n(n^6+6n^4+12n^2+8-n^6-2n^3-1)}{\sqrt[6]{(n^2+2)^{15}}+\sqrt[6]{(n^2+2)^{12}}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^2}+\sqrt[6]{(n^2+2)^9}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^4}+\sqrt[6]{(n^2+2)^6}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^6}+\sqrt[6]{(n^2+2)^3}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^8}+\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}}} =$$

$$\frac{n(6n^4-2n^3+12n^2+7)}{\sqrt[6]{(n^2+2)^{15}}+\sqrt[6]{(n^2+2)^{12}}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^2}+\sqrt[6]{(n^2+2)^9}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^4}+\sqrt[6]{(n^2+2)^6}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^6}+\sqrt[6]{(n^2+2)^3}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^8}+\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}}} =$$

$$\frac{6n^5-2n^4+12n^3+7n)}{\sqrt[6]{(n^2+2)^{15}}+\sqrt[6]{(n^2+2)^{12}}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^2}+\sqrt[6]{(n^2+2)^9}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^4}+\sqrt[6]{(n^2+2)^6}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^6}+\sqrt[6]{(n^2+2)^3}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^8}+\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}}}.$$

Nyní si všimněme, že všech šest členů ve jmenovateli je stejného řádu

$$\sqrt[6]{(n^2)^{15}} = \sqrt[6]{n^{30}} = n^5,$$

což je stejný řád jako v čitateli. Lze tedy z čitatele i jmenovatele vytknout n^5 a dostaneme

$$\frac{6n^5-2n^4+12n^3+7n}{\sqrt[6]{(n^2+2)^{15}}+\sqrt[6]{(n^2+2)^{12}}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^2}+\sqrt[6]{(n^2+2)^9}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^4}+\sqrt[6]{(n^2+2)^6}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^6}+\sqrt[6]{(n^2+2)^3}\,\sqrt[6]{(n^3+1)^8}+\sqrt[6]{(n^3+1)^{10}}} =$$

$$\frac{n^5}{n^5}\cdot\frac{6-2/n+12/n^2+7/n^4}{\sqrt[6]{(1+2/n^2)^{15}}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^{12}}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)^2}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^9}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)^4}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^6}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)^6}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^3}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)}}$$

A nyní díky opakovanému používání věty o aritmetice limit a faktu, že lze provést limitění pod odmocninou, jestliže výsledkem je nenulové reálné číslo, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6-2/n+12/n^2+7/n^4)}{\sqrt[6]{(1+2/n^2)^{15}}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^{12}}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)^2}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^9}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)^4}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^6}\,\sqrt[6]{(1+1/n^3)^6}+\sqrt[6]{(1+2/n^2)^3}\,\sqrt[6]{(1+1/n}}$$

$$= \frac{6-0+0+0}{1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1+1} = \frac{6}{6} = 1.$$

3:42, 3:48

Příklad 30.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}, \qquad a, b, c > 0.$$

Řešení.

Buď $M = \max\{a, b, c\}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n\to\infty} M \cdot \sqrt[n]{(a/M)^n + (b/M)^n + (c/M)^n}.$$

Nyní si uvědomme, že alespoň jeden zlomek pod odmocninou je roven jedné, a nejvýše jsou všechny tři rovny jedné (to pokud $a = b = c = M$). Platí tedy, že

$$1 \leq (a/M)^n + (b/M)^n + (c/M)^n \leq 3.$$

Potom tedy také

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{(a/M)^n + (b/M)^n + (c/M)^n} \leq \sqrt[n]{3}.$$

Protože však platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ pro libovolné kladné reálné číslo x, je

$$\lim \sqrt[n]{1} = \lim \sqrt[n]{3} = 1,$$

a tedy podle věty o dvou policajtech je také

$$\lim \sqrt[n]{(a/M)^n + (b/M)^n + (c/M)^n} = 1.$$

Tudíž, pokud se se znalostí tohoto výsledku vrátíme zpět na počátek, dostaneme s pomocí věty o aritmetice limit:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n\to\infty} M \cdot \sqrt[n]{(a/M)^n + (b/M)^n + (c/M)^n} = M \cdot 1 = M = \max\{a, b, c\}.$$

3:50,4:02

Příklad 31.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}.$$

Řešení.

Pro řešení tohoto příkladu je zapotřebí znát limity tzv. růstové škály. Zde použijeme dvě:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{n!} = 0, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Jinak řečeno, $n!$ roste rychleji než libovolná exponenciela i mocnina.[2]

Tato znalost nám naznačuje, že bude správné vytknout $(n+1)!$ z čitatele a $n \cdot n!$ ze jmenovatele. Dostaneme tak:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} \cdot \frac{(3^n)/(n+1)! + (n^5)/(n+1)! + 1}{n^6/n! + 1}.$$

Nyní si uvědomme, že

$$\frac{(n+1)!}{n \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n \cdot n!} = \frac{n+1}{n},$$

můžeme tedy psát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n \cdot n!} \frac{(3^n)/(n+1)! + (n^5)/(n+1)! + 1}{n^6/n! + 1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(3^n)/(n+1)! + (n^5)/(n+1)! + 1}{n^6/n! + 1}.$$

Je zřejmé, že $\frac{n+1}{n} \to 1$ pro $n \to \infty$. Stačí tak ukázat, že všechny nekonstantní členy ve druhém zlomku konvergují k nule. Což lze s pomocí limit růstové škály výše nahlédnout například takto:

- $\lim(3^n)/(n+1)! = \lim(3^n)/n! \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \cdot 0 = 0$ podle věty o aritmetice limit – první zlomek tvarem přímo odpovídá první obecné limitě růstové škály uvedené na začátku řešení pro $a = 3$, limita druhého je zřejmá;
- $\lim(n^5)/(n+1)! = \lim(n^5)/n! \cdot \frac{1}{n+1} = 0 \cdot 0 = 0$ podle obdobného argumentu jako výše, první zlomek odpovídá pro $b = 5$ druhé obecné limitě růstové škály;
- $\lim(n^6)/n! = 0$ podle druhé obecné limity růstové škály s $b = 6$.

---

[2]) Toto lze dokázat například pomocí podílového kritéria pro konvergenci řad.

Pokud dáme všechny tyto znalosti dohromady a opakovaně použijeme větu o aritmetice limit, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(3^n)/(n+1)! + (n^5)/(n+1)! + 1}{n^6/n! + 1} =$$

$$1 \cdot \frac{0+0+1}{0+1} = 1.$$

4:50, 4:58

Příklad 38.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+\sqrt{n}+(-1)^n}{n^2+n\sqrt{n}}.$$

Řešení.

Vytkněme nejrychleji rostoucí členy z čitatele i jmenovatele.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+\sqrt{n}+(-1)^n}{n^2+n\sqrt{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2}\cdot\frac{1+1/n^{2,5}+(-1)^n/n^3}{1+1/n^{1/2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1+1/n^{2,5}+(-1)^n/n^3}{1+1/n^{1/2}}.$$

Všechny nekonstantní členy ve zlomku jdou k nule pro $n\to\infty$. Pro členy $1/n^{2,5}$ a $1/n^{1/2}$ to plyne přímo ze základních limit, pro člen $(-1)^n/n^3 = (-1)^n\cdot 1/n^3$ to plyne podle věty o limitě součinu omezené a nulové posloupnosti, neboť posloupnost $(-1)^n$ je zřejmě omezená a $1/n^3\to 0$ pro $n\to\infty$. A samozřejmě, $\lim n = +\infty$.

Opakovaným použitím věty o aritmetice limit a předešlých úvah tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1+1/n^{2,5}+(-1)^n/n^3}{1+1/n^{1/2}} =$$

$$+\infty\cdot\frac{1+0+0}{1+0} = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

Poznámka: pokud není přímo zavedena aritmetika nekonečna, může se exaktní odůvodnění posledního kroku lišit. V takovém případě se bude patrně opírat o variantu věty o aritmetice limit zabývající se případem, kdy je jedna z limit nekonečná a druhá nenulová.

4:58,5:02

Příklad 39.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right).$$

Řešení.

Rozšířením dle vztahu $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$ dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

a vyktnutím n ze jmenovatele pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+1/n}+1}.$$

Protože

- $\lim n = +\infty$,
- $\lim \sqrt{1+1/n} = \sqrt{1+0} = 1$, neboť lze provést limicení výrazu pod odmocninou, pokud je výsledek vlastní a nenulový,

máme díky opakovanému použití věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+1/n}+1} = \frac{+\infty}{1+1} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

Poznámka: pokud není přímo zavedena aritmetika nekonečna, může se exaktní odůvodnění posledního kroku lišit. V takovém případě se bude patrně opírat o variantu věty o aritmetice limit zabývající se případem, kdy je jedna z limit nekonečná a druhá nenulová.

5:02,5:12

Příklad 40.

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sqrt{n}.$$

Řešení.

Tato limita neexistuje. Lze to nahlédnout tak, že najdeme dvě její podposloupnosti, které mají různou limitu.

Funkce sinus je 2π periodická. Výraz $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ tedy nabývá osm hodnot stále „kolem dokola“.

Vyberme tedy jako první podposloupnost $n = 8k$, kde k probíhá množinu přirozených čísel. Potom $\sin\frac{8k\pi}{4} = \sin(2k\pi) = 0$. Potom tedy také $\sin\left(\frac{8k\pi}{4}\right)\sqrt{8k} = 0\cdot\sqrt{8k} = 0$, a tedy tato podposloupnost je konstantně rovna nule. Limita této podposloupnosti je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{8k\pi}{4}\right)\sqrt{8k} = \lim_{k\to\infty} 0 = 0.$$

Nyní bychom mohli volit jako druhou podposloupnost fakticky libovolně $n = 8k + c$, kde c je libovolné celé číslo od 1 do 7 (s výjimkou 4). Pro pohodlí zvolme $c = 2$. Potom vzhledem k 2π periodičnosti funkce sinus je

$$\sin\left(\frac{(8k+2)\pi}{4}\right)\sqrt{(8k+2)} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{8k+2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{8k+2} = 1\cdot\sqrt{8k+2} = \sqrt{8k+2}.$$

Limita této podposloupnosti je tedy

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{(8k+2)\pi}{4}\right)\sqrt{(8k+2)} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{8k+2} = +\infty,$$

neboť platí, že kdykoli $\lim_{k\to\infty} a_k = +\infty$, pak také pro libovolné racionální číslo $q > 0$ platí $\lim_{k\to\infty}(a_k)^q = +\infty$. Stačí tedy tento fakt použít pro $a_k = 8k + 2$ a $q = 1/2$.

Našli jsme tedy dvě podposloupnosti, které mají různou limitu, a tudíž limita v zadání neexistuje. (Pokud totiž posloupnost limitu má, pak každá její podposloupnost musí mít tutéž limitu.)

5:12,5:29

Příklad 41.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-\sin n-\cos n)\frac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}.$$

Řešení.

Pro řešení tohoto příkladu je zapotřebí několik speciálních znalostí.

• $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a$ pro libovolné $a>0$, $a\neq 1$. Speciálně, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\frac{1}{n}}=\ln 2$. Toto plyne snadno pomocí Heineho věty a základní (někdy definiční) limity pro přirozenou exponencielu, nebo to lze, ovšem s jistými obtížemi, dokázat přímo. Díky tomu a větě o aritmetice limit vidíme, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}=\lim_{n\to\infty}n^6\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[n]{2}-1}=+\infty\cdot\frac{1}{\ln 2}=+\infty.$$

• Platí, že $\sin n+\cos n=\sin n+\sin(n+\pi/2)=2\sin\frac{n+n+\pi/2}{2}\cos\frac{n-n-\pi/2}{2}=2\sin(n+\pi/4)\cos(-\pi/4)=\sqrt{2}\sin(n+\pi/4)$. Z toho vidíme, že

$$\sqrt{3}-\sin n-\cos n=\sqrt{3}-\sqrt{2}\sin(n+\pi/4)\geq\sqrt{3}-\sqrt{2}>0.$$

Z toho tedy nakonec vyplývá, že

$$(\sqrt{3}-\sin n-\cos n)\frac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}\geq(\sqrt{3}-\sqrt{2})\frac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}.$$

Přitom pravá strana má, jak jsme výše ukázali, limitu rovnou $+\infty$. Platí však věta, že pokud pro dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ platí, že pro všechny členy je $a_n\geq b_n$, pak také stejná nerovnost platí i pro jejich limity. Navíc, pokud b_n má limitu $+\infty$, potom limita a_n automaticky taktéž existuje a je rovna $+\infty$. Z toho tedy plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3}-\sin n-\cos n)\frac{n^5}{\sqrt[n]{2}-1}=+\infty.$$

5:29,5:31

Příklad 42.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}.$$

Řešení.

Lze přímočaře dokázat matematickou indukcí, že

$$n! \geq n^{n/2}.$$

Potom tedy

$$\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Platí věta, že pokud pro dvě posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ platí, že pro všechny členy je $a_n \geq b_n$, pak také stejná nerovnost platí i pro jejich limity. Navíc, pokud b_n má limitu $+\infty$, potom limita a_n automaticky taktéž existuje a je rovna $+\infty$. Z toho vyplývá, že

$$\lim \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

5:31,5:44

Příklad 43.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

Řešení.

Budeme vycházet z toho, že je znám následující fakt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

kde e je Eulerovo číslo.

Nyní vše řešíme pomocí „trikových úprav“. Mají smysl pouze pro $n \geq 2$, ale to výsledek limity neovlivňuje.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{-1}\right]^n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}\right]^{-1} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right]^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right]^{-1} =$$

Nyní si uvědomme, že podle věty o aritmetice limit (použité na dluh) je

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right]^{-1}.$$

První limita je de fakto totožná s limitou uvedenou hned na začátku úlohy, pouze index je posunut o jedničku. Tyto limity jsou tedy stejné, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$.

Druhá limita je zřejmě rovna jedné, neboť opět pomocí věty o aritmetice limit je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = 1+0 = 1.$$

Z toho vychází, že

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right]^{-1} = [e\cdot 1]^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Tento výsledek, tedy že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e},$$

si velmi dobře zapamatujte!

5:44,5:52

Příklad 44.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Řešení.

Protože posloupnost (pozor na exponent!)

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

je vlastně podposloupností posloupnosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, která má limitu e, je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e.$$

Upravme tedy nyní výraz ze zadání takto:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}.$$

Nyní pozor! Není možné psát, že

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1,$$

protože to by byla hrubá chyba — tzv. částečné limitění — a to přesto, že výsledek je, jak uvidíme, správný.

Je potřeba postupovat opatrněji a použít větu o dvou policajtech.

Je zřejmé, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\geq 1,$$

neboť umocňujeme číslo, které je větší nebo rovno jedné.

Pro opačný odhad použijeme už zmíněného faktu, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$. To totiž podle definice limity znamená, že pro libovolné ε od jistého členu počínaje musí platit, že $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}<=e+\varepsilon$. Volme tedy například $\varepsilon=1$, pak od jistého členu počínaje musí platit, že $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\leq e+1$.

Od jistého členu počínaje tedy máme nerovnosti

$$1\leq\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\leq e+1,$$

a tedy také

$$1\leq\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}\leq\sqrt[n]{e+1}.$$

Limita levé i pravé strany je však rovna jedné, neboť $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ pro libovolné reálné číslo $a > 0$. Podle věty o dvou policajtech je tedy také

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

5:53,6:00

Příklad 45.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Řešení.

Z příkladu č. 43 víme (pozor na exponent!), že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}.$$

Přepišme tedy limitu ze zadání do tvaru

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}.$$

Nyní pozor! Stejně jako v předchozím příkladu není možné psát, že

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}[1/e]^n=0,$$

protože to by byla hrubá chyba — tzv. částečné limitění — a to přesto, že výsledek je, jak uvidíme, opět správný.

Znovu je zapotřebí použít větu o dvou policajtech. Zřejmě

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\geq 0.$$

Pro opačný odhad použijeme už zmíněný výsledek, že $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=1/e$. Z definice limity víme, že pro libovolné ε musí platit od jistého členu počínaje, že $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n<1/e+\varepsilon$. Volme nyní ε tak, aby $1/e+\varepsilon<1$, tedy například $\varepsilon=\frac{1-1/e}{2}$. Potom platí od jistého členu počínaje:

$$0\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\leq 1/e+\varepsilon,$$

a tedy také

$$0\leq\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}\leq(1/e+\varepsilon)^n.$$

Protože je však $\lim(1/e+\varepsilon)^n=0$, neboť jde o geometrickou posloupnost s kvocientem $1/e+\varepsilon<1$, věta o dvou policajtech dává, že

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}=0.$$

6:01,6:09

Příklad 65a. Určete $\liminf x_n$ a $\limsup x_n$, pokud

$x_n = \dfrac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$,

Řešení.

Zřejmě

$$x_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \leq \frac{2n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 2+1=3.$$

Použili jsme přitom fakt, že $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$, zde konkrétně pro $a = 2$.

Z toho vyplývá, že máme hypotézu, že $\limsup x_n = 3$. K potvrzení potřebujeme najít podposloupnost x_n konvergující k číslu 3. K tomu však stačí volit $n = 2k$, neboť

$$x_{2k} = \frac{2(2k)(-1)^{2k}}{2k+1} + \sqrt[2k]{2} = \frac{4k}{2k+1} + \sqrt[k]{\sqrt{2}} \xrightarrow{k\to\infty} 2+1=3,$$

kde jsme opět použili fakt, že $\lim \sqrt[k]{a} = 1$ pro $a > 0$ (nyní pro $a = \sqrt{2}$).

Zcela analogicky

$$x_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \geq \frac{-2n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} -2+1=-1.$$

Z toho plyne hypotéza, že $\liminf x_n = -1$. K potvrzení potřebujeme najít podposloupnost x_n konvergující k číslu -1. K tomu však stačí volit $n = 2k+1$, neboť

$$x_{2k+1} = \frac{2(2k+1)(-1)^{2k+1}}{2k+1+1} + \sqrt[2k+1]{2} = -\frac{4k+2}{2k+2} + \sqrt[2k+1]{\sqrt{2}} \xrightarrow{k\to\infty} -2+1=-1,$$

kde jsme tentokrát využili faktu, že $\sqrt[2k+1]{2}$ je podposloupností $\sqrt[n]{2}$, a tudíž musí mít stejnou limitu rovnou jedné.

Závěr: $\limsup x_n = 3$, $\liminf x_n = -1$.

6:09,6:20

Příklad 65b. Určete $\liminf x_n$ a $\limsup x_n$, pokud

$x_n = \dfrac{n^2}{1+n^2} \cos 2n\pi 3.$

Řešení.

Výraz $\cos(2n\pi/3)$ nabývá periodicky tří hodnot.

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos(2\pi/3) = -1/2, \qquad \cos(4\pi/3) = -1/2.$$

Je tedy

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{1+n^2} \le x_n \le \frac{n^2}{1+n^2},$$

máme hypotézu, že

$$\limsup x_n = \lim \frac{n^2}{1+n^2} = 1, \qquad \liminf x_n = \lim -\frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{1+n^2} = -\frac{1}{2}.$$

K potvrzení potřebujeme najít podposloupnosti konvergující k těmto dvěma hodnotám.

Stačí volit:

• pro potvrzení hypotézy o limsup $n = 3k$, neboť $\cos(2(3k)\pi/3) = \cos(2k\pi) = 1$, a tedy

$$x_{3k} = \frac{(3k)^2}{1+(3k)^2} \xrightarrow{k\to\infty} 1.$$

• pro potvrzení hypotézy o liminf $n = 3k+1$, neboť $\cos(2(3k+1)\pi/3) = \cos(2k\pi + 2\pi/3) = -1/2$, a tedy

$$x_{3k+1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(3k+1)^2}{1+(3k+1)^2} \xrightarrow{k\to\infty} -\frac{1}{2}.$$

6:21,6:50 !!

Příklad 65c. Určete $\liminf x_n$ a $\limsup x_n$, pokud
$x_n = (1+1/n)^n(-1)^n + \sin(n\pi/4)$.

Řešení.

Nejprve připomeňme, že
$$\lim(1+1/n)^n = e,$$

Člen $\sin(n\pi/4)$ nabývá periodicky osmi různých hodnot, z nichž největší je 1 pro $n = 8k+2$, neboť

$$\sin((8k+2)\pi/4) = \sin(2k\pi + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1,$$

a nejmenší je -1 pro $n = 8k+6$, neboť

$$\sin((8k+6)\pi/4) = \sin(2k\pi + 3\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1.$$

Z toho vyplývá s pomocí výše uvedené limity, že

$$x_n \leq (1+1/n)^n(-1)^n + 1 \leq (1+1/n)^n + 1 \xrightarrow{n\to\infty} e+1.$$

Tudíž máme hypotézu, že $\limsup x_n = e+1$.

Pro její potvrzení stačí volit zmíněných $n = 8k+2$, neboť

$$x_{8k+2} = (1+1/(8k+2))^(8k+2)\cdot(-1)^{8k+2} + \sin((8k+2)\pi/4) =$$

$$= (1+1/(8k+2))^(8k+2) + 1 \xrightarrow{k\to\infty} e+1,$$

neboť posloupnost $\{(1+1/(8k+2))^(8k+2)\}_{k=1}^{\infty}$ je podposloupností $\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$, o níž víme, že má limitu e.

Druhou hypotézu se nám však potvrdit nepodaří.

Problém je v tom, že $n = 8k+6$ je sudý exponent, a tudíž výraz $(-1)^n$ nebude roven -1, jak bychom potřebovali. Dostali bychom, že

$$x_{8k+6} = (1+1/(8k+6))^(8k+6)\cdot(-1)^{8k+6} + \sin((8k+6)\pi/4) =$$

$$= (1+1/(8k+6))^(8k+6) - 1 \xrightarrow{k\to\infty} e-1 > 0 > -e-1.$$

A protože pro jiná n než $n = 8k+6$ není sinusový člen roven minus jedné, musíme konstatovat, že $-e-1$ není hromadným bodem posloupnosti x_n a musíme najít jiného kandidáta pro $\liminf x_n$.

V takovém případě bývá nejjednodušší použít následujícího postupu, a to sice rozdělit posloupnost $\{x_n\}$ na osm podposloupností a dopočíst analogicky výpočtům výše:

$$x_{8k} \to e,$$
$$x_{8k+1} \to -e + \sqrt{2}/2,$$

$$x_{8k+2} \to e+1,$$
$$x_{8k+3} \to -e+\sqrt{2}/2,$$
$$x_{8k+4} \to e,$$
$$x_{8k+5} \to -e-\sqrt{2}/2,$$
$$x_{8k+6} \to e-1,$$
$$x_{8k+7} \to -e-\sqrt{2}/2.$$

Z těchto hodnot je nejmenší $-e-\sqrt{2}/2$, je to tedy náš kandidát na limes inferior.

To, že posloupnost $\{x_n\}$ nemá menší hromadnou hodnotu, lze nahlédnout například takto.

Pro spor předpokládejme, že $\{x_n\}$ má hromadnou hodnotu $h < -e - \sqrt{2}/2$.

Volme ε rovno polovině vzdálenosti bodů h a $-e - \sqrt{2}/2$.

Pro každou podposloupnost $\{x_{8k}\}$, $\{x_{8k+1}\}$, $\{x_{8k+2}\}$, …, $\{x_{8k+7}\}$ je od jistého členu N_0, N_1, N_2, …, N_7 rozdíl mezi limitní hodnotu a hodnotou členů posloupnosti menší než ε.

To ale znamená, že od členu $N = \max\{N_0, N_1, \ldots, N_7\}$ počínaje jsou **všechny** členy posloupnosti vzdáleny od příslušných osmi limitních hodnot nejvýše o ε, protože každý patří do některé z osmi podposloupností $\{x_{8k}\}$, $\{x_{8k+1}\}$, $\{x_{8k+2}\}$, …, $\{x_{8k+7}\}$. Speciálně, protože $-e - \sqrt{2}/2$ je nejnižší z oněch osmi limitních hodnot, je $x_n > -e - \sqrt{2}/2 - \varepsilon$ pro všechna $n \geq N$. To ale znamená, že žádný člen posloupnosti $\{x_n\}$ pro $n \geq N$ neleží v okolí $(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$, a tudíž h nemůže být hromadnou hodnotou posloupnosti $\{x_n\}$.

Tudíž $\liminf x_n = -e - \sqrt{2}/2$, protože $\{x_n\}$ nemůže mít menší hromadnou hodnotu.

10:16,10:29

Příklad 1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + \sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/3)}{\sqrt[n]{n^3} - 1}$$

Řešení.

Limita neexistuje. Ukážeme to tak, že najdeme dvě vybrané podposloupnosti s různými limitami.

Předně si uvědomme, že $\sqrt[n]{n^3} > 1$ pro každé $n \geq 2$ a $\sqrt[n]{n^3} \to 1$ pro $n \to \infty$.[3] Z toho plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^3} - 1} = +\infty.$$

Označme tedy výraz v limitě ze zadání

$$x_n = \frac{(-1)^n + \sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/3)}{\sqrt[n]{n^3} - 1}.$$

Volme nejprve $n = 12k$. Potom

$$x_{12k} = \frac{(-1)^{12k} + \sin(12k\pi/4) - \cos(12k\pi/3)}{\sqrt[12k]{(12k)^3} - 1} =$$

$$\frac{1 + \sin(3k\pi) - \cos(4k\pi)}{\sqrt[12k]{(12k)^3} - 1} = \frac{1 + 0 - 1}{\sqrt[12k]{(12k)^3} - 1} = 0.$$

Přitom využíváme faktu, že sinus od celého násobku π je roven nule a kosinus od celého násobku 2π, a tedy také 4π je roven jedné. A proto

$$\lim_{k\to\infty} x_{12k} = 0.$$

Nyní naopak volme $n = 12k + 4$. Potom

$$x_{12k+4} = \frac{(-1)^{12k+4} + \sin((12k+4)\pi/4) - \cos((12k+4)\pi/3)}{\sqrt[12k+4]{(12k+4)^3} - 1} =$$

$$\frac{1 + \sin((3k+1)\pi) - \cos(4k\pi + 4\pi/3)}{\sqrt[12k+4]{(12k+4)^3} - 1} =$$

$$\frac{1 + 0 - \cos(4\pi/3)}{\sqrt[12k+4]{(12k+4)^3} - 1} =$$

$$\frac{1 + 0 + \frac{1}{2}}{\sqrt[12k+4]{(12k+4)^3} - 1} =$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[12k+4]{(12k+4)^3} - 1}.$$

[3]) Využívá se přitom základní limity $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ a věty o aritmetice limit.

Přitom jsme opět využili faktu, že sinus od celého násobku π je roven nule, a pak také, že kosinus je 2π, a tedy samozřejmě také 4π periodický, a $\cos(4\pi/3) = -1/2$. A proto

$$\lim_{k\to\infty} x_{12k+4} = \lim_{k\to\infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[12k+4]{(12k+4)^3} - 1} = \frac{3}{2} \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Tím jsme našli dvě různé podposloupnosti s různými limitami a tudíž limita původní posloupnosti neexistuje.

10:29,10:58 !!

Příklad 2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - \left\lfloor \sqrt[3]{(n+1)!} \right\rfloor}{3n^3 - \left\lfloor \sqrt[3]{(n)!} \right\rfloor}$$

Hranaté závorky značí funkci dolní celá část.

Řešení.

Pro řešení tohoto příkladu je zapotřebí znát limity tzv. růstové škály. Zde použijeme dvě:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad a \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{n!} = 0, \qquad b \in \mathbb{R}.$$

Jinak řečeno, $n!$ roste rychleji než libovolná exponenciela i mocnina.[4]

Intuitivně odhadneme, že faktoriály budou růst rychleji než mocnina a odmocnina, a to i přes dolní celou část, protože ta „nemění řád rychlosti růstu“. Celý zlomek se tedy nejspíše bude chovat jako podíl

$$\frac{-\sqrt[3]{(n+1)!}}{-\sqrt[3]{n!}} = \sqrt[3]{\frac{(n+1)!}{n!}} = \sqrt[3]{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Tuto svou hypotézu však nyní musíme formálně dokázat.

Pro své pohodlí nejprve vytkněme minus z čitatele i jmenovatele, ať máme před nejrychleji rostoucími členy kladná znaménka.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - \left\lfloor \sqrt[3]{(n+1)!} \right\rfloor}{3n^3 - \left\lfloor \sqrt[3]{(n)!} \right\rfloor} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\lfloor \sqrt[3]{(n+1)!} \right\rfloor - 3^n}{\left\lfloor \sqrt[3]{(n)!} \right\rfloor - 3n^3} =$$

Nahlédněme nyní, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\lfloor \sqrt[3]{(n+1)!} \right\rfloor}{3^n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)!} - 1}{3^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)!}}{3^n} - \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(n+1)!}{(3^n)^3}} - \frac{1}{3^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(n+1)!}{(3^3)^n}} - \frac{1}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{(n+1)!}{27^n}} - \frac{1}{3^n} = +\infty + 0 = +\infty,$$

[4]) Toto lze dokázat například pomocí podílového kritéria pro konvergenci řad.

kde jsme využili identity o přehazování exponentů $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$ platné pro libovolná tři kladná reálná čísla, větu o aritmetice limit, limitu růstové škály, podle níž $\lim \frac{(n+1)!}{27^n} = \lim n \cdot \lim \frac{n!}{27^n} = +\infty \cdot +\infty = +\infty$ a fakt, že pokud $\lim a_n = +\infty$, pak také $\lim (a_n)^q = +\infty$ pro každé kladné racionální q.[5] Tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{3^n} = +\infty.$$

Zcela analogicky je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{n!}\right]}{3n^3} = +\infty,$$

jediné, co bude podstatně jinak v postupu výše, bude použití jiné limity růstové škály.

Z toho samozřejmě vyplývá, pokud přehodíme čitatele a jmenovatele, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3}{\left[\sqrt[3]{n!}\right]} = 0.$$

Nyní tedy můžeme z původní limity vytknout

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right] - 3^n}{\left[\sqrt[3]{(n)!}\right] - 3n^3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]} \cdot \frac{1 - 3^n/\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{1 - 3n^3/\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]} =$$

což je podle věty o aritmetice limit (použité na dluh) rovno

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3^n/\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{1 - 3n^3/\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]} \cdot \frac{1-0}{1-0} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]}.$$

[5]) platí i pro kladná q reálná

Nyní se opět zbavíme funkce celá část. Protože čekáme, že celkový výsledek bude plus nekonečno, použijeme odhady, které zlomek zmenší, tedy čitatel o jedničku zmenšíme a jmenovatel o jedničku zvýšíme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt[3]{(n+1)!}\right]}{\left[\sqrt[3]{(n)!}\right]} \geq$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)!}-1}{\sqrt[3]{(n)!}+1}.$$

Nyní ještě jednou provedeme předchozí krok, tedy vytkneme členy s faktoriály.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)!}-1}{\sqrt[3]{(n)!}+1} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)!}}{\sqrt[3]{(n)!}} \cdot \frac{1-1/\sqrt[3]{(n+1)!}}{1+1/\sqrt[3]{(n)!}} =$$

Je samozřejmě $\lim \sqrt[3]{(n+1)!} \geq \lim \sqrt[3]{n!} = +\infty$, neboť $\lim n! = +\infty$ a platí fakt, že pokud $\lim a_n = +\infty$, pak také $\lim (a_n)^q = +\infty$ pro každé kladné racionální q. Z toho okamžitě vyplývá, že $\lim 1/\sqrt[3]{(n+1)!} = \lim 1/\sqrt[3]{n!} = 0$.

Proto tedy levý zlomek upravíme přesně podle začátku úlohy a pak použijeme opakovaně větu o aritmetice limit.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n+1)!}}{\sqrt[3]{(n)!}} \cdot \frac{1-1/\sqrt[3]{(n+1)!}}{1+1/\sqrt[3]{(n)!}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/\sqrt[3]{(n+1)!}}{1+1/\sqrt[3]{(n)!}} =$$

$$= +\infty \cdot \frac{1-0}{1+0} = +\infty.$$

Protože výsledek má smysl, bylo všechno použití vět o aritmetice limit korektní. Díky tomu, že výsledek je $+\infty$, bylo korektní i několikeré použití věty o porovnání limit, konkrétně že pokud $a_n \geq b_n$ od nějakého členu počínaje a $\lim b_n = +\infty$, potom $\lim a_n$ existuje a je $\lim a_n = +\infty$.

10:59/11:02, 11:22/11:36

Příklad 3)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4 \cos n] - n^2 3^n + 4^n}$$

Hranaté závorky značí funkci dolní celá část.

Řešení.

Pro řešení tohoto příkladu je zapotřebí znát limity tzv. růstové škály. Zde použijeme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\beta^n} = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 1.$$

Podle této škály je nejrychleji rostoucím členem pod n-tou odmocninou člen 4^n. Vytkneme jej tedy.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4 \cos n] - n^2 3^n + 4^n} =$$

$$4 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4 \cos n]/4^n - n^2 (3/4)^n + 1}.$$

Nyní ukážeme, že limity nekonstantních členů pod odmocninou jsou nulové.

Přímo podle limity růstové škály pro $\alpha = 2$, $\beta = (4/3)$ máme, že

$$\lim_{n\to\infty} n^2 (3/4)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(4/3)^n} = 0.$$

Pro druhý zlomek použijeme větu o dvou policajtech. Protože dolní celou část lze odhadnout pomocí vztahů $x - 1 \leq [x] \leq x$ a funkci kosinus pomocí $-1 \cos x \leq 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, máme

$$\frac{\left[n^4 \cos n\right]}{4^n} \leq \frac{n^4 \cos n}{4^n} \leq \frac{n^4}{4^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

díky limitě růstové škály použité na $\alpha = 4$, $\beta = 4$. A na druhou stranu máme

$$\frac{\left[n^4 \cos n\right]}{4^n} \geq \frac{n^4 \cos n - 1}{4^n} \geq \frac{-n^4 - 1}{4^n} = -\frac{n^4}{4^n} - \frac{1}{4^n} \xrightarrow{n\to\infty} -0 - 0 = 0$$

opět díky růstové škále a faktu, že $(1/4)^n$ je geometrická posloupnost s kvocientem menším než jedna. Podle věty o dvou policajtech tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[n^4 \cos n\right]}{4^n} = 0.$$

Jestliže jsou nyní limity obou nekonstantních členů pod n-tou odmocninou nulové, liší se od nějakého N-tého členu posloupnosti počínaje oba zlomky od nuly nejvýše o $\varepsilon = 1/4$ (z definice limity posloupnosti). Z toho mimo jiné vyplývá, že výraz pod n-tou odmocninou po vytknutí je nejpozději od tohoto N-tého členu definován pro všechny další členy posloupnosti.

Od tohoto N-tého členu počínaje tedy máme odhad

$$\sqrt[n]{[n^4 \cos n]/4^n - n^2(3/4)^n + 1} \le \sqrt[n]{1/4 + 1/4 + 1} = \sqrt[n]{1,5} \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

neboť známe základní limitu $\lim \sqrt[n]{a} = 1$ pro všechna $a > 0$. A z druhé strany

$$\sqrt[n]{[n^4 \cos n]/4^n - n^2(3/4)^n + 1} \ge \sqrt[n]{-1/4 - 1/4 + 1} = \sqrt[n]{0,5} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

z téhož důvodu. Znovu podle věty o dvou policajtech tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4 \cos n] - n^2 3^n + 4^n} =$$

$$4 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4 \cos n]/4^n - n^2(3/4)^n + 1} = 4 \cdot 1 = 4.$$

11:36,11:45

Příklad 4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$$

Řešení.

Platí, že

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n} =$$

$$\sqrt[6]{(n^3+n^2)^2}-\sqrt[6]{(n^2+n)^3} =$$

$$\frac{(n^3+n^2)^2-(n^2+n)^3}{\sqrt[6]{(n^3+n^2)^{10}}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^8}\sqrt[6]{(n^2+n)^3}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^6}\sqrt[6]{(n^2+n)^6}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^4}\sqrt[6]{(n^2+n)^9}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^2}\sqrt[6]{(n^2+n)^{12}}+\sqrt[6]{(n^2+n)^{15}}} =$$

$$\frac{(n^6+2n^5+n^4)-(n^6+3n^5+3n^4+n^3)}{\sqrt[6]{(n^3+n^2)^{10}}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^8}\sqrt[6]{(n^2+n)^3}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^6}\sqrt[6]{(n^2+n)^6}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^4}\sqrt[6]{(n^2+n)^9}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^2}\sqrt[6]{(n^2+n)^{12}}+\sqrt[6]{(n^2+n)^{15}}} =$$

$$\frac{-n^5-2n^4-n^3)}{\sqrt[6]{(n^3+n^2)^{10}}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^8}\sqrt[6]{(n^2+n)^3}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^6}\sqrt[6]{(n^2+n)^6}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^4}\sqrt[6]{(n^2+n)^9}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^2}\sqrt[6]{(n^2+n)^{12}}+\sqrt[6]{(n^2+n)^{15}}}$$

a díky tomu, že ze jmenovatele lze z každého členu vyktnout také člen řádu n^5, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n^5-2n^4-n^3)}{\sqrt[6]{(n^3+n^2)^{10}}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^8}\sqrt[6]{(n^2+n)^3}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^6}\sqrt[6]{(n^2+n)^6}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^4}\sqrt[6]{(n^2+n)^9}+\sqrt[6]{(n^3+n^2)^2}\sqrt[6]{(n^2+n)^{12}}+\sqrt[6]{(}}$$

Tedy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}\right) = -\frac{1}{6}.$$

Díky tomu můžeme usoudit, že čitatel se chová přibližně jako rozdíl čísel $5-1/6$, tedy jako člen nultého řádu. A protože ve jmenovateli je člen nejvyššího řádu $n^{1/2}$, tedy řádu vyššího, bude výsledek limity nulový a půjde to nahlédnout vytknutím $n^{1/2}=\sqrt{n}$ ze jmenovatele a pomocí věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{1-1/\sqrt[4]{n}} =$$

$$0\cdot\frac{\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n})}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}1/\sqrt[4]{n}} = 0\cdot\frac{5-1/6}{1-0} = 0.$$

11:45,11:57

Příklad 5)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}-\cos n\pi/4\right)\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$$

Řešení.

Nejprve si uvědomme, že:

• Vytknutím $\sqrt{n}$ ze jmenovatele i čitatele prvního zlomku vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/\sqrt[6]{n}}{\sqrt{1+1/n}}=\frac{2-0}{\sqrt{1+0}}=2$$

podle věty o aritmetice limit a faktu, že lze provést limitění pod odmocninou, pokud je výsledek nenulové reálné číslo.

• Nyní si uvědomme, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}=\lim_{n\to\infty}(2n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\sqrt[n]{2n}}=+\infty\cdot\frac{1}{0-}=-\infty.$$

To plyne z věty o aritmetice limit, faktu, že $\sqrt[n]{2n}>1$ pro všechna $n\geq 2$ a faktu, že $\lim\sqrt[n]{2n}=\lim\sqrt[n]{n}\cdot\lim\sqrt[n]{2}=1\cdot 1=1$ podle základních limit pro n-tou odmocninu.

Celý výraz v původní limitě se tedy chová v uvozovkách jako

$$(2-\cos n\pi/4)\cdot(-\infty).$$

A protože první člen zřejmě nemůže měnit znaménko, neboť kosinus je ohraničen intervalem $[-1,1]$, bude výsledkem také minus nekonečno. Formálně to lze nejjednodušeji dokázat za pomocí tvrzení, že pokud $a_n\leq b_n$ od nějakého členu počínaje a $\lim b_n=-\infty$, pak také $\lim a_n$ existuje a je $\lim a_n=-\infty$.

Toto tvrzení použijeme takto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}-\cos n\pi/4\right)\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}\leq$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}-1\right)\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}=$$

a nyní podle věty o aritmetice limit

$$\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}-\lim_{n\to\infty}1\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}=(2-1)\cdot(-\infty)=-\infty.$$

11:58, 12:06

Příklad 6)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5+1} - \sqrt[5]{n^4-n^3} + \sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

Řešení.

Členové v čitateli se postupně chovají jako $n^{5/6}$, $n^{4/5}$ a 1, jmenovatel se chová jako $n^{1/2}$. Vytkněme tedy nejvyšší mocninu v čitateli i jmenovateli. Dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5+1} - \sqrt[5]{n^4-n^3} + \sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/6}}{n^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{1+1/n^5} - \sqrt[5]{n^4/n^{25/6} - n^3/n^{25/6}} + (\sqrt[n]{n^2})/(n^{5/6})}{\sqrt{1-1/\sqrt{n}}}.$$

Protože $5/6 > 1/2$, jde první zlomek do $+\infty$. Naopak, protože $3 < 4 < 25/6$, jdou zlomky pod pátou odmocninou k nule. Konečně $\lim \sqrt[n]{n^2} = \lim \sqrt[n]{n} \cdot \lim \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$, a proto

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{n^{5/6}} = \lim \sqrt[n]{n^2} \cdot \lim \frac{1}{n^{5/6}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Podle opakovaně použitých vět o aritmetice limit a limitění pod odmocninou tak máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/6}}{n^{1/2}} \cdot \frac{\sqrt[6]{1+1/n^5} - \sqrt[5]{n^4/n^{25/6} - n^3/n^{25/6}} + (\sqrt[n]{n^2})/(n^{5/6})}{\sqrt{1-1/\sqrt{n}}} =$$

$$= +\infty \cdot \frac{\sqrt[6]{1+0} - \sqrt[5]{0-0} + 0}{\sqrt{1-0}} = +\infty \cdot \frac{1-0+0}{1} = +\infty.$$

12:06

Příklad 7)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Řešení.

V příkladu 43 jsme ukázali, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

Lze naopak ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

To plyne buď ze Stirlingova vzorce nebo také pomocí věty o dvou policajtech pomocí dvou odhadů, které lze dokázat matematickou indukcí:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n\le n!\le en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Potom totiž n-tým odmocněním máme nerovnosti

$$\sqrt[n]{e}\frac{n}{e}\le\sqrt[n]{n!}\le\sqrt[n]{e}\,\sqrt[n]{n}\frac{n}{e}$$

a následným dělením n

$$\sqrt[n]{e}\frac{1}{e}\le\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\le\sqrt[n]{e}\,\sqrt[n]{n}\frac{1}{e}.$$

A protože $\lim\sqrt[n]{e}=1$ a $\lim\sqrt[n]{n}=1$, je limita obou stran rovna $1/e$, tedy podle věty o dvou policajtech je

$$\lim\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=1/e,$$

musí tedy být také

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e.$$

Tudíž

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=1/e\cdot e=1.$$

Důkaz obou odhadů pomocí matematickou indukcí následuje níže.

Dokazujme nejprve

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n\le n!.$$

Pro $n=2$ nerovnost platí. Předpokládejme, že platí pro n a dokazujme je pro $n+1$. Pak dostaneme

$$(n+1)!=(n+1)n!>(n+1)e\left(\frac{n}{e}\right)^n\overset{?}{>}e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Otázka zní, zda platí poslední nerovnost s otazníkem. Ta je však po jednoduchém krácení a vydìlení ekvivalentní nerovnosti

$$e > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

O této nerovnosti se ví, že je pravdivá, neb posloupnost napravo je ostře rostoucí a roste (konverguje) k číslu e.[6]

Druhá nerovnost se odvodí podobně, neb platí

$$(n+1)! = (n+1)n! < (n+1)en\left(\frac{n}{e}\right)^n \overset{?}{<} e(n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Po jednoduchém krácení si všimneme, že poslední nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$e < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

přičemž tato nerovnost je pravdivá, protože posloupnost napravo je klesající a má limitu e.[7]

Pro všechny případy však připojme přece jen zkrácené důkazy monotonie obou posloupností.

Ukázat, že posloupnost x_n je ostře rostoucí, vlastnš znamená ukázat nerovnost $x_{n+1} > x_n$, což pro nezáporné posloupnosti je ekvivalentní nerovnosti $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. Odhadujeme pro $x_n = (1+1/n)^n$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq$$

použitím Bernoulliovy nerovnosti $(1+y)^k \geq 1+ky$

$$\geq \left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1.$$

Ukázat, že posloupnost (y_n) je klesající, lze analogicky. Dokazujeme nerovnost $y_n < y_{n-1}$, což je ekvivalentní nerovnosti $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$. Uvažme tedy pro $y_n = (1+1/(n+1))^n$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geq$$

podle Bernoulliovy nerovnosti

$$\geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{(n^2+n+1)n}{(n^2-1)(n+1)} = \frac{n^3+n^2+n}{n^3+n^2-n-1} =$$

$$= \frac{n^3+n^2-n-1+2n}{n^3+n^2-n-1} = 1 + \frac{2n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

[6]) Důkaz těchto tvrzení je obvykle součástí definice čísla e. Monotonii lze dokázat pomocí Bernoulliovy nerovnosti.

[7]) Taktéž.