1a

Příklad 2 :

- Nejprve upravíme:

$$\cos(3n+2) = \cos 3n \cos 2 - \sin 3n \sin 2.$$

Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Proto mají řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 3n$ omezené částečné součty.

- Posloupnost $\left\{\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je pro všechna $n > 2$ klesající (jak lze ověřit například derivováním funkce $\frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}}$), proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$, a tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos(3n+2) =$$

$$= \cos 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cos 3n - \sin 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}} \sin 3n$$

konverguje, neboť je lineární kombinací konvergentních řad.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro kosinus .... 5 bodů
- omezenost částečných součtů $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(3n)$ resp. $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(3n)$ .... 2 body
- $\frac{n}{(n+1)\sqrt{n+1}}$ jde monotónně k nule .... 5 bodů
- použití (zmínění) Dirichletova kritéria .... 2 body
- lineární kombinace konvergentních řad je konvergentní řada .... 1 bod

---

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (4) LS 2008-09, 17. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Platí

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$
$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{5}(x + o(x^2))^5 + o(\sin^5 x)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Dále máme

$$\begin{aligned}\sin\left(x - \frac{1}{3}x^3\right) &= x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x - \frac{1}{3}x^3\right)^5 + o(x^5)\\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{40}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0.\end{aligned}$$

Pak dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{5}x^5.$$

Dále platí

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Pro jmenovatele dostáváme

$$(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{6}x^5 + o(x^5).$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{(\arcsin x) \cdot (\cos x) - \operatorname{arctg} x} = -\frac{6}{5}.$$

15

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Víme, že posloupnost $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty.
- Ukážeme, že posloupnost $\left\{\log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je rostoucí: pro $x > 0$ označme $f(x) := \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$; potom $f'(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1} > 0$ (pro všechna $x > 0$). Posloupnost

15

$a_n := f(n)$, $n \in \mathbf{N}$, je tedy rostoucí a snadno se spočte $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\cdot \cos n \ \text{ konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (monotonii lze opět dostat například zderivováním příslušné funkce, omezenost plyne z toho, že posloupnost má vlastní limitu – jakou?). Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\cdot \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\cdot \cos n \ \text{ konverguje.} \tag{2}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right)\cdot \log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\cdot \cos n\right| \le \frac{\pi}{2}\left|\log\left(\frac{e^n-1}{e^n+1}\right)\right| = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right) \tag{3}$$

a dále

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{2}{e^n-1}\right)}{\frac{2}{e^n-1}}\cdot \frac{\frac{2}{e^n-1}}{\frac{2}{e^n}} = 1 \tag{4}$$

(spočtěte pečlivě). Použijte dále skutečnost, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{e^n}$ konverguje (například podle podílového kritéria). Výsledek pak dá limitní srovnávací a srovnávací kritérium s použitím (3) a (4).

Příklad 3 : Použijeme substituci $e^x = y$, $e^x\,dx = dy$. Dostaneme

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3x}}{(e^x+2)^2(e^x+1)^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2}\,dy\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)^2} = \frac{4}{(y+2)^2} + \frac{4}{y+2} + \frac{1}{(y+1)^2} - \frac{4}{y+1}.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{4}{y+2} + 4\log(y+2) - \frac{1}{y+1} - 4\log(y+1)\right]_0^{\infty} \\ &= \left[-\frac{4}{y+2} - \frac{1}{y+1} + 4\log\left(\frac{y+2}{y+1}\right)\right]_0^{\infty} = 3 - 4\log 2. \end{aligned}$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x) = (\arcsin x - x)^{\alpha}\frac{\sin^{\beta}(\pi x)}{(1-x)^{\alpha}}$$

pro $x \in (0,1)$. Funkce f je na intervalu $(0,1)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

1c

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n ,$$

kde $\log x$ ($= \ln x$) je přirozený logaritmus (logaritmus o základu e). (15 bodů)

Řešení : Položme

$$a_n := \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n .$$

Protože $\frac{n+3}{n+1} > 1$, je $a_n > 0$. Použijeme odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}}}_{=:b_n} \underbrace{\log \frac{n+3}{n+1}}_{=:c_n} .$$

Platí

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \log \frac{n+3}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \log \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \log 1 = 0 ,$$

kde jsme využili faktu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, aritmetiky limit a spojitosti logaritmu v bodě 1. Dále pro každé n přirozené platí $0 < \frac{n+1}{n+3} < 1$, tedy i

$$0 < \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+3}} < 1 ,$$

odkud plyne, že posloupnost b_n je omezená[2]. Podle věty, že limita součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule, je nula, tedy máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 ,$$

což podle limitního odmocninového kritéria znamená, že zadaná řada konverguje.

Poznámka: Jinou možností bylo nejprve použít (limitního) srovnávacího kritéria, tj. buď si uvědomit, že pro všechna přirozená n platí

$$0 < \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n < \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n ,$$

nebo že platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n}{\left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n} = 1 .$$

Ať již použijeme jeden či druhý argument, vidíme, že konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ implikuje konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+3} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$. Konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log \frac{n+3}{n+1} \right)^n$ však dostaneme z odmocninového kritéria, jako výše.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- aplikace odmocninového kritéria .... 3 body
- $a_n > 0$, aritmetika limit .... 2 + 2body
- výpočet limity logaritmu .... 4 bodů
- výpočet limity n-té odmocniny .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění výpočtu limity (omezená krát posloupnost s nulovou limitou) .... 4 body

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[2] Samozřejmě je také možno spočítat limitu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ například rozpisem obecné mocniny na exponencielu a logaritmus, a obdržíme také $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

1d

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^{4/3}}$. Čtenáři je tak v této chvíli dána možnost přijít na to, proč zrovna tato mocnina n je ta pravá... Pokud se necháte poddat, tak vězte, že pro velká n se

$$\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{1}{n},$$

zatímco (stále pro velká n) se

$$\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{n}}. \tag{2}$$

Nyní je potřeba tyto naše odhady matematicky přesně odůvodnit. Počítejme tedy, a nezapomeňme ani na odůvodnění výpočtu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}\right)} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}}}}_{=:A_n} \underbrace{\frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}}_{=:B_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Protože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dostali jsme $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2}{2\sqrt{2}}$. Použili jsme větu o aritmetice limit, Heineovu větu a spojitost odmocniny. Pro posloupnost B_n platí (průběh a výsledek tohoto výpočtu je přesně to, co stojí za „odhadem“ v (2)):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Rovnost v $(\star)$ plyne ze základní limity $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a Heineovy věty použité na posloupnost $\{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\}$, která sestává z nenulových členů a konverguje k 0. Tím je odůvodněn výpočet (3).

Protože limita v (3) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 body
- číselný výpočet limity v (3) .... 6 bodů
- závěr, že řada konverguje .... 4 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- Heineho věta .... 1 bod
- limita složené funkce .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (3)
LS 2008-09, 10. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3), \qquad y \to 0,$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$

$$\cos x \cdot \cos x^2 = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{24}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0,$$

$$\sqrt{1+x^2} - \cos x \cdot \cos x^2 - x^2 = \frac{1}{3}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Odtud dostáváme

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{1}{3}x^4.$$

Pokud jde o jmenovatele, tak dostáváme

$$\sqrt{e^{x^2}} = \sqrt{1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right) - \frac{1}{8}\left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)\right)^2 + \frac{1}{16}\left(x^2 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)\right)^3 + o(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Pak platí

$$\sqrt{e^{x^2}} - \cos(x) - x^2 = \frac{1}{12}x^4 + o(x^5), \qquad x \to 0.$$

Z výše uvedených rozvojů plyne

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{\exp(x^2)} - \cos(x) - x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^5)}{\frac{1}{12}x^4 + o(x^5)} = 4.$$

1e

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbf{R}$, proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$ má omezené částečné součty.
- Platí

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) x = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{y\to 0+} \left(1 - \frac{\log(1+y)}{y}\right) = 0,$$

1e

tedy i

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)n=0$$

podle Heineho věty.

- Označíme $f(x):=1-x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, potom

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}-\left(\log(x+1)-\log x\right).$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro libovolné $x\in(0,\infty)$ existuje $\xi_x\in(0,1)$ takové, že

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+\xi_x}<0 \qquad \text{pro všechna } x>0.$$

Funkce f je tedy klesající na intervalu $(0,\infty)$, a proto je i posloupnost $a_n=f(n)$ klesající.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka: Monotonii funkce můžeme zdůvodnit i takto. Platí

$$f''(x)=\frac{1}{x(1+x)^2},\qquad x\in(0,\infty).$$

Funkce f' je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ a $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. Odtud plyne, že f' je záporná na $(0,\infty)$, a tedy f je na $(0,\infty)$ klesající.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\sqrt{2x+1}=t$, tj. $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$, $\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$. Dostaneme

$$I:=\int_0^1\frac{\sqrt{2x+1}}{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Rozkladem na parciální zlomky zjistíme

$$\frac{4t^2}{(t^2+3)^2}=\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}.$$

Zintegrovat $\frac{4}{t^2+3}$ není obtížné, primitivní funkci k funkci $\frac{12}{(t^2+3)^2}$ najdeme například pomocí rekurentní formule pro integrály typu $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$. Celkově dostaneme

$$\int\left(\frac{4}{t^2+3}-\frac{12}{(t^2+3)^2}\right)\mathrm{d}t\overset{c}{=}\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}},\qquad t\in\mathbf{R}.$$

Tedy je

$$I=\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}-\frac{2t}{t^2+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Příklad 4 : Označíme

$$f(x)=\frac{\log^\alpha(1+x)\sin^\beta x}{x^2(\pi-x)^3}$$

pro $x\in(0,\pi)$. Funkce f je na intervalu $(0,\pi)$ kladná a spojitá. Stačí tedy vyšetřit její chování v krajních bodech.

Bod 0. Položme $g(x)=\frac{x^\alpha x^\beta}{x^2}=x^{\alpha+\beta-2}$. Funkce g je na intervalu $(0,1]$ kladná, spojitá a standardní výpočet ukazuje $\lim_{x\to0+}f(x)/g(x)=\pi^{-3}\in(0,\infty)$. Podle limitního srovnávacího kritéria

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (2)
LS 2008-09, 3. 6. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5), \quad x \to 0, \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6), \quad x \to 0,$$

a proto

$$\exp(x^2)\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^3 - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{2} + o(x^5) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{41}{120}x^5 + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dále platí

$$\sin(xe^{x^2}) = x + x^3 + \frac{x^5}{2} + o(x^6) - \frac{1}{6}\left(x + x^3 + o(x^4)\right)^3 + \frac{1}{120}\left(x + o(x^2)\right)^5 + o((xe^{x^2})^5), \qquad x \to 0.$$

Platí $\lim_{x\to 0} xe^{x^2}/x = 1$ a můžeme tedy psát $o(x^5)$ místo $o((xe^{x^2})^5)$. Pak máme

$$\sin(xe^{x^2}) = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{x^5}{120} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

Dohromady:

$$\exp(x^2)\sin x - \sin(x\exp(x^2)) = \frac{x^5}{3} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

a proto

$$T_5^{f,0}(x) = \frac{x^5}{3}.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\log(1 + x^3) - \sin(x^2 \sin x) = x^3 + o(x^5) - \sin\left(x^3 - \frac{x^5}{6} + o(x^6)\right) = \frac{x^5}{6} + o(x^5), \quad x \to 0.$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)\sin x - \sin(x\exp(x^2))}{\log(1 + x^3) - \sin(x^2 \sin x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{3} + o(x^5)}{\frac{x^5}{6} + o(x^5)} = 2.$$

1ℓ

Příklad 2 : Použijeme dvakrát Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Posloupnost $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{n}$ konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Posloupnost $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{\sqrt{n}}$ konverguje k nule a je klesající. Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \quad \text{konverguje.} \tag{2}$$

12

- Součet konvergentních řad (1) a (2) je konvergentní řada, tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{3}$$

- Protože posloupnost $\cos \frac{1}{n}$ je omezená a rostoucí (odůvodněte podrobně!), konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (3)) i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \sqrt{n}\cos n}{n} \cdot \cos \frac{1}{n}.$$

Závěr: řada konverguje.

Příklad 3 : Použijeme substituci $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Potom máme

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt.$$

Tato substituce převede uvažovaný integrál na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\, dt.$$

Integrand rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)} = \frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1}.$$

Standardní integrací racionálních zlomků pak dostaneme

$$\int \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\log(t^2+t+2) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) - \frac{1}{2}\log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \qquad \text{na } \mathbf{R}.$$

Pak máme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2+3}{(t^2+1)(t^2+t+2)}\, dt = \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+2}{t^2+1} \right) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}} \right) + \operatorname{arctg} t \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \pi \left(1 + \frac{1}{\sqrt{7}} \right).$$

Poznámka: Pozor! Rovnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t+1}{t^2+t+2} + \frac{1-t}{t^2+1} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+t+2}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t}{t^2+1}\, dt$$

neplatí, neboť integrály na pravé straně neexistují.

Příklad 4 : Integrand $f(x) = \operatorname{tg}^{\alpha} x \sin^{\beta} x$ je spojitý a kladný na intervalu $(0, \pi/2)$ pro každé $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Integrál tedy $\int_0^{\pi/2} f$ tedy konverguje, právě když konvergují integrály $\int_0^{\pi/4} f$ a $\int_{\pi/4}^{\pi/2} f$.

- Integrál $\int_0^{\pi/4} f$. Pro srovnání použijeme kladnou a spojitou funkci $g(x) = x^{\alpha+\beta}$ definovanou na $(0, \pi/4]$. Platí $\lim_{x \to 0+} f(x)/g(x) = 1$, a tedy podle limitního srovnávacího kritéria $\int_0^{\pi/4} f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_0^{\pi/4} x^{\alpha+\beta}\, dx$. Poslední integrál konverguje, právě když $\alpha + \beta > -1$.

2a

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+1}{(n+2)!+2}.$$

(15 bodů)

Řešení : Použijeme limitní srovnávací kritérium, členy vyšetřované řady budeme srovnávat s $\frac{1}{n^2}$. Pro velká n se totiž

$$a_n := \frac{n!+1}{(n+2)!+2} \quad \text{„chová jako“} \quad \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \quad \text{což se „chová jako“} \quad \frac{1}{n^2} =: b_n\,.$$

Nyní je potřeba tento náš odhad odůvodnit. Počítejme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n!+1)\,n^2}{(n+2)!+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n!}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2\cdot n!}} = 1\,, \tag{1}$$

s využitím faktu, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ a podle věty o aritmetice limit.

Protože limita v (1) je vlastní a nenulová, a protože obě srovnávané řady jsou řady s kladnými členy, konverguje námi vyšetřovaná řada právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada však konverguje podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

Závěr: námi vyšetřovaná řada tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- odhad s jakou řadou srovnat .... 5 bodů
- číselný výpočet limity v (1) .... 5 bodů
- závěr .... 5 bodů

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- uvedení, že $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ apod. .... 1 bod
- aritmetika limit .... 1 bod
- limitní srovnání: řady s nezápornými členy, limita vlastní a nenulová .... 1 bod
- uvedení, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

2b

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo i Abelovo kritérium:

- Nejprve upravíme:

$$\sin(2n+1) = \sin 2n \cos 1 + \cos 2n \sin 1.$$

Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$ a že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$. Proto mají řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n$ i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n$ omezené částečné součty. **Pozor**, nebylo možno argumentovat tak, že omezenost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(2n+1)$ plyne z toho, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$.

- Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je klesající, proto podle Dirichletova kritéria konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$, a tedy i řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos 1 \cdot \frac{\sin 2n}{n} + \sin 1 \cdot \frac{\cos 2n}{n} \right) \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

- Protože $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost a funkce arctg je rostoucí a omezená funkce, je posloupnost $\{\operatorname{arctg} \sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí a omezená. Podle Abelova kritéria a (1) tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{n} \sin(2n+1) \quad \text{konverguje.}$$

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- použití součtového vzorce pro sinus .... 5 bodů
- omezenost částečných součtů $\sin 2n$ resp. $\cos 2n$ .... 2 body
- $1/n$ jde monotónně k nule .... 1 bod
- použití Dirichletova kritéria .... 1 bod
- monotonie $\operatorname{arctg} \sqrt{n}$ .... 3 body
- omezenost $\operatorname{arctg} \sqrt{n}$ .... 2 body
- použití Abelova kritéria .... 1 bod

2c

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}},$$
kde $\binom{n}{k}$ je kombinační číslo „n nad k“. (15 bodů)

Řešení :

Položme
$$a_n := \frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{3}}{\binom{n}{4}+\binom{n}{5}}.$$
Úpravou čitatele i jmenovatele tohoto zlomku použitím vzorce $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ dostaneme
$$a_n = \frac{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120}} = \frac{60+20(n-2)}{5(n-2)(n-3)+(n-2)(n-3)(n-4)} = \frac{20}{(n-2)(n-3)}.$$
Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots-2)$, $(\cdots-3)$ ve výrazech výše,
$$a_n \text{ se tedy „chová jako“ } \frac{1}{n^2}.$$
Označme tedy $b_n := \frac{1}{n^2}$. Lze ihned konstatovat, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$
podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{20n^2}{(n-2)(n-3)} = \frac{20}{\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}.$$
Odtud ihned dostaneme, že
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 20, \tag{7}$$
protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$.

Obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ mají nezáporné členy, limita v (7) je vlastní a nenulová, plyne tedy z (6) podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- úprava a_n .... 4 body
- určení b_n a spočtení (7) .... 5 bodů
- odůvodnění: zmínka, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha > 1$ .... 1 bod
- odůvodnění: zmínka, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ pro $\beta > 0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje .... 1 bod
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: (7) je vlastní a nenulová .... 2 body
- odůvodnění užití limitního srovnávacího kritéria: jde o řady s nezápornými členy 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

2d

Příklad 2 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi}) .$$

(15 bodů)

Řešení : Využijeme znalost, že posloupnost (částečných součtů) $\sum_{n=1}^{N} \sin nx$ je pro pevné $x \in \mathbf{R}$ omezená – tedy že pro dané $x \in \mathbf{R}$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $N \in \mathbf{N}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \sin nx \right| < K .$$

Pro $x = \sqrt{\pi}$ tedy dostaneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\sqrt{\pi})$ má omezenou posloupnost částečných součtů.

Pro ověření konvergence řady použijeme Dirichletovo kritérium, tedy bude stačit, pokud ukážeme, že

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} = 0 ,$

(ii) $\displaystyle \frac{n^{10}}{2^n+1}$ je monotónní posloupnost, alespoň od jistého indexu n_0.

Ad (i): Výpočet uvedené limity není obtížný, snadno ji spočtete některou z metod 1. semestru.

Ad (ii): označme $a_n := \frac{n^{10}}{2^n+1} > 0$, potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{10} \cdot (2^n+1)}{n^{10} \cdot (2^{n+1}+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \cdot \frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 , \qquad (1)$$

tedy jistě existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$, tedy $a_{n+1} < a_n$ pro všechna $n \geq n_0$, $n \in \mathbf{N}$.

Jiný způsob, jak zjistit monotonii, je zkoumat znaménko derivace pomocné funkce

$$f(x) = \frac{x^{10}}{2^x+1} , \qquad \text{tj.} \qquad f'(x) = \frac{x^9 2^x}{(2^x+1)^2} \left[10 + \frac{10}{2^x} - x \log 2\right] , \qquad x \in \mathbf{R} .$$

Protože výraz v hranatých závorkách jde k mínus nekonečnu pro $x \to +\infty$, existuje určitě takové $x_0 \in \mathbf{R}$, že $f'(x) < 0$ pro všechna $x > x_0$. Funkce f tedy klesá na intervalu $(x_0, +\infty)$, proto $a_{n+1} = f(n+1) < f(n) = a_n$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n > x_0$.

Závěr: řada konverguje podle Dirichletova kritéria.

Poznámka : Tento postup ukazuje, jak asi pracovat (zdůvodňovat) v případě použití Abel-Dirichletova kritéria. Pro tuto konkrétní řadu však existovalo mnohem jednodušší řešení: protože

$$\left| \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi}) \right| \leq \frac{n^{10}}{2^n+1} \qquad \text{pro všechna } n \in \mathbf{N} ,$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1}$ konverguje dle podílového kritéria – viz (1), konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n+1} \sin(n\sqrt{\pi})$ absolutně, a tedy konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:

- zdůvodnění omezenosti částečných součtů .... 2 body
- výpočet limity .... 4 body
- ověření monotonie .... 6 bodů
- aplikace kritéria a závěr .... 3 body

2e

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$
(15 bodů)

Řešení :
Položme
$$a_n := \frac{\sqrt[3]{n^3+1}-n}{\sqrt[3]{n^{3/4}+2}-\sqrt[3]{n^{3/4}+1}}.$$
Rozšířením čitatele i jmenovatele tohoto zlomku dvojím použitím vzorce $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ (například pro úpravu čitatele klademe $A=\sqrt[3]{n^3+1}$, $B=n$) dostaneme
$$a_n = \frac{1}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}}+n(n^3+1)^{\frac{1}{3}}+n^2} \cdot \frac{(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}}+(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}}+(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}}{1}.$$
Použijeme limitní srovnávací kritérium. Za tím účelem nejprve odhadneme, jak se a_n chová pro velké hodnoty n. „Tipneme si“, že pro dostatečně velká n je možno zanedbat aditivní konstanty $(\cdots+2)$ a $(\cdots+1)$ ve výrazech výše, a_n se tedy „chová jako“
$$b_n := \frac{n^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$
Mimo jiné je nyní vidět, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \tag{6}$$
podle věty, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ konverguje právě tehdy, když $\alpha>1$.

To, že se řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ „chovají stejně“, je ale nutné přesně ověřit:
$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\left[(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{2}{3}}+(n^{\frac{3}{4}}+2)^{\frac{1}{3}}(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{1}{3}}+(n^{\frac{3}{4}}+1)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot n^{\frac{3}{2}}}{(n^3+1)^{\frac{2}{3}}+n(n^3+1)^{\frac{1}{3}}+n^2} =$$
$$= \frac{\left[\left(1+\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1+\frac{2}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{3}{2}}}{\left[(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{2}{3}}+(1+\frac{1}{n^3})^{\frac{1}{3}}+1\right]\cdot n^2}.$$
Po vykrácení tohoto zlomku výrazem n^2 tedy dostaneme, že
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1, \tag{7}$$
protože $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\beta}=0$ pro $\beta>0$.

Obě řady mají nezáporné členy, takže z (7) a z (6) plyne podle limitního srovnávacího kritéria, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu při výpočtu:
- úprava a_n (rozšíření zlomku) .... 4 body
- určení b_n .... 4 body
- ověření (7) .... 4 body
- odůvodnění .... 3 body

2R

Příklad 2 : Použijeme Dirichletovo kritérium:

- Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbf{R}$. Proto i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n$ má omezené částečné součty.
- Ukážeme, že posloupnost $\left\{n \sin \frac{1}{n} - 1\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule a je monotónní:
- Limita se spočítá snadno, je totiž

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

a proto i (podle Heineho věty) $\lim \left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right) = 0$.

- Pro zjištění monotonie označme

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} - 1, \qquad \text{pak} \qquad f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

a

$$f''(x) = -\frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} < 0 \qquad \text{pro } x > \tfrac{1}{\pi}.$$

Odtud plyne, že funkce f' je klesající na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$ a protože $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$, je funkce f' kladná na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$. To ovšem znamená, že funkce f je rostoucí na intervalu $(\frac{1}{\pi}, +\infty)$, což jsme chtěli ukázat.

Podle Dirichletova kritéria tedy řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} - 1 \right) \sin 3n \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$

Poznámka. Řada dokonce konverguje absolutně, což byl jiný (otázkou je, jestli jednodušší) způsob, jak zjistit její konvergenci. Pro všechna $n \in \mathbf{N}$ totiž platí:

$$\left| \left(n \sin \frac{1}{n} - 1 \right) \sin 3n \right| \leq \left| n \sin \frac{1}{n} - 1 \right| = 1 - n \sin \frac{1}{n},$$

a protože

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \to 0+} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6},$$

je (podle Heineho věty) i

$$\lim \frac{1 - n \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} \in (0, +\infty),$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)$ tedy konverguje právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato však konverguje, proto konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - n \sin \frac{1}{n}\right)$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} - 1\right) \sin 3n$ konverguje absolutně.

(2g) 3

$$a_n = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{n!\,n!} > 0 \quad \forall n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4^{n+1}}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{4^n\, n!\,n!}{(2n)!} = \frac{1}{4}\frac{\cancel{(2n+2)}^{2}(2n+1)}{(n+1)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \longrightarrow 1 \quad \text{pro } n \to \infty$$

Podílové kritérium nerozhodlo.

Raabe:

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = n\,\frac{1}{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

pro $n \to \infty$

Řada diverguje dle Raabeho kritéria.

Řešení písemné zkoušky z Matematické analýzy 1b (1)
LS 2008-09, 27. 5. 2009

Řešení zde uváděná jsou pouze jakýmsi podrobnějším návodem s mezivýsledky. Doporučujeme provést a rozmyslet si všechny úpravy a výpočty jako cvičení podrobně.

Příklad 1 : Dostaneme postupně tyto Taylorovy rozvoje:

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

$$\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1 + \left(-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)} = \cdots = 1 - x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^5), \quad x \to 0,$$

(s využitím rozvoje $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$, $y \to 0$, a vlastností symbolu „o"). Dále dostaneme:

$$2\exp(x^2) = 2 + 2x^2 + x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

což dohromady dá

$$\sqrt{\cos 2x} - 2\exp(x^2) + 1 + 3x^2 = -\frac{7}{6}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

a proto

$$T_4^{f,0}(x) = -\frac{7}{6}x^4.$$

Rozvojem jmenovatele dostaneme

$$\cos x^2 - \cos x - \frac{x^2}{2} = -\frac{13}{24}x^4 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - 2\exp(x^2) + 1 + 3x^2}{\cos(x^2) - \cos x - \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{6}x^4 + o(x^4)}{-\frac{13}{24}x^4 + o(x^4)} = \frac{28}{13}.$$

Příklad 2 : Použijeme nejprve Dirichletovo a potom Abelovo kritérium:

- Posloupnost $\{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty; posloupnost $\frac{1}{2n+\frac{100}{n}}$ konveguje k nule a od jistého indexu je monotónní (neboť například derivace funkce $f(x) := 2x + \frac{100}{x}$ je $f'(x) = 2 - \frac{100}{x^2}$; pro všechna $x > \sqrt{50}$ je $f'(x) > 0$, proto je funkce $2x + \frac{100}{x}$ rostoucí na $(\sqrt{50}, \infty)$ a funkce $\frac{1}{2x+\frac{100}{x}}$ klesající na $(\sqrt{50}, \infty)$). Podle Dirichletova kritéria (odůvodněte vše podrobně) tedy řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n + \frac{100}{n}} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \quad \text{konverguje.} \tag{1}$$
- Protože posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)^3$ je rostoucí a omezená, konverguje podle Abelova kritéria (s využitím znalosti (1)) i řada
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^3}{2n + \frac{100}{n}} \cdot \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

2h

Závěr: řada konverguje.

(2h)

Poznámka: bylo možno také použít rovnou Dirichletovo kritérium:

Posloupnost $\{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ má omezené částečné součty a derivace funkce $\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)^3}{2x+\frac{100}{x}}$ je od jistého $x_0 \in \mathbf{R}$ záporná, tedy tato funkce klesá na okolí nekonečna, a snadno se také ukáže, že má v nekonečnu nulovou limitu. V tomto případě je ovšem výpočet derivace výše uvedené funkce a zjištění jejího chování v blízkosti nekonečna poněkud obtížnější, i když proveditelné.

Příklad 3 : Integrovaná funkce je definovaná na $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$, primitivní funkci tedy hledáme na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Při použití substituce $t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ dostaneme postupně (všimněte si, že pro žádné $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$ nemůže být t^2 být rovno 1):

$$x=\frac{t^2-2}{1-t^2}, \qquad dx=-\frac{2t}{(1-t^2)^2}\,dt,$$

$$(x+1)(4x+5)(2x+3)=-\frac{(t^2+3)(t^2+1)}{(1-t^2)^3}, \qquad (3x+4)=-\frac{t^2+2}{1-t^2},$$

a tedy

$$\int\frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,dx=-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt.$$

Rozklad na parciální zlomky dá

$$-2\int\frac{t^2+2}{(t^2+1)(t^2+3)}\,dt=-\int\frac{1}{t^2+1}\,dt-\int\frac{1}{t^2+3}\,dt\overset{c}{=}-\operatorname{arctg}t-\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt3},\quad t\in\mathbf{R},$$

a tedy

$$\int\frac{3x+4}{(x+1)(4x+5)(2x+3)\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}}\,dx\overset{c}{=}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt3}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\right)$$

na $(-\infty,-2)$ a na $(-1,\infty)$.

Příklad 4 : Označíme

$$I:=\int_0^\infty(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,dx, \tag{2}$$

$$I_1:=\int_0^1(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,dx, \tag{3}$$

$$I_\infty:=\int_1^\infty(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}\,dx. \tag{4}$$

Pro vyšetření chování integrálu I_0 použijeme

$$\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{arctg}x)^a\frac{\sin x}{2x+1}}{x^{a+1}}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^a\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2x+1}=1,$$

proto I_0 konverguje (podle limitního srovnávacího kritéria) právě když konverguje $\int_0^1 x^{a+1}\,dx$, což je právě tehdy, když $a>-2$.

2i

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2},$$

kde symbolem log značíme přirozený logaritmus, tedy logaritmus o základu e. (15 bodů)

Řešení : Položíme $a_n := \left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n^2}$. Protože platí $\lim_{n\to\infty}\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=1$, je určitě $a_n \geq 0$ pro všechna dostatečně velká přirozená[1] n, a můžeme proto použít (limitní) odmocninové kritérium.

Platí:

$$\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)^{n}=e^{n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)}=:e^{A_n}.$$

Dále je

$$A_n=n\log\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)=\underbrace{n}_{P_n}\cdot\underbrace{\frac{\log\left(1-\log\frac{n+1}{n}\right)}{-\log\frac{n+1}{n}}}_{Q_n}\cdot\underbrace{\frac{-\log\frac{n+1}{n}}{-\left(\frac{n+1}{n}-1\right)}}_{R_n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{n+1}{n}\right)}_{S_n}.$$

Všimněte si, jakých úprav používáme, abychom co nejvíce při výpočtu $\lim_{n\to\infty}A_n$ využili základních limit pro logaritmus. Dále už je výpočet jednoduchý, i když jeho správné odůvodnění v sobě skýtá jisté možnosti nečekaných bodových ztrát:

$$\lim_{n\to\infty}P_n\cdot S_n=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}Q_n=1\quad\text{(základní limita pro logaritmus a využití Heineho věty s } y_n=-\log\frac{n+1}{n}\text{)},$$

$$\lim_{n\to\infty}R_n=1\qquad\text{(obdobné odůvodnění jako pro } Q_n\text{)}.$$

Celkově tedy je podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty}A_n=-1,\qquad\text{a proto}\qquad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Protože $1/e<1$, plyne z limitního odmocninového kritéria, že námi vyšetřovaná řada konverguje.

Bodování při použití tohoto postupu výpočtu:

- $a_n \geq 0$ .... 2 body
- výpočet Q_n .... 4 body
- výpočet R_n .... 3 body
- $\lim_{n\to\infty}A_n=-1$ .... 2 body
- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=e^{-1}$ .... 1 bod
- závěr, že řada konverguje dle odm. kritéria .... 3 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění limity složené funkce .... 2 body
- aritmetika limit .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.

[1] Dá se dokonce jednoduše spočíst, že $\left(1-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)\geq 0$ a tedy i $a_n\geq 0$ pro všechna přirozená n, není to však nutné: odmocninové kritérium potřebuje pouze, aby existovalo přirozené n_0, že $a_n\geq 0$ pro všechna přirozená $n\geq n_0$.

2j

Příklad 3 : Vyšetřete konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right).$$
(15 bodů)

Řešení : Položme
$$x_n := \frac{1+2^n}{3^n}, \qquad y_n := \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}. \tag{6}$$
Není těžké odhadnout, že x_n „se chová pro velká n jako“ $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, a také, že $y_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}$ „se chová pro velká n jako“ $\frac{1}{n^{1/4+1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}$.

Přesněji, pro x_n máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{3^n}\cdot\frac{3^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}+1\right) = 1, \tag{7}$$
zatímco pro y_n máme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\frac{1}{n^{1/4+1/2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}. \tag{8}$$
Ve výpočtech používáme věty o aritmetice limit, skutečnosti, že $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje (buď podle odmocninového kritéria nebo konstatováním faktu, že jde o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{2}{3}$), dále pak řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje (s využitím znalosti, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\gamma}}$ konveguje právě tehdy, když $\gamma > 1$), a konečně protože členy všech čtyř řad v (7), (8) jsou nezáporné, dostaneme dvojím použitím limitního srovnávacího kritéria, že
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n} \quad \text{konverguje, zatímco} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \quad \text{diverguje.}$$

První možnost zakončení: Z výše uvedeného již plyne, že řada
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right) \quad \text{diverguje,}$$
neboť kdyby tato řada konvergovala, musela by (protože rozdíl dvou konvergenvních řad je konvergentní řada) konvergovat i řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)-\left(\frac{1+2^n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$, což není pravda.

Druhá možnost zakončení: Pro všechna přirozená n platí $\frac{1+2^n}{3^n}+\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}} > \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$ a protože řada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[4]{n}}\right)$ diverguje, diverguje podle srovnávacího kritéria i řada, kterou jsme měli vyšetřit.

Bodování při použití prvního postupu při výpočtu (při druhém budou body přerozděleny):

- konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .... 5 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .... 6 bodů
- divergence $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ .... 4 body

Bodové srážky za nesprávná nebo zapomenutá odůvodnění:

- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ konverguje a proč .... 1+1 bod
- odůvodnění: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/4}}$ diverguje a proč .... 1+1 bod
- odůvodnění: zmínky, že $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\beta}} = 0$ pro $\beta > 0$ .... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: limity (7), (8) jsou vlastní a nenulové ..... 1 bod
- odůvodnění užití limit. srov. krit.: jde o řady s nezápornými členy .... 1 bod

Bodová srážka za num. chybu, která nemění charakter výpočtu, je podle závažnosti 1-2 body.