Příklad 4.30. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}$ pro $x \neq 2$, $f(2) = 0$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Pro $x \neq 2$ dostáváme

$$f'(x) = \left((x-2)\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}\right)' = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} + $$
$$+ (x-2)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x-2}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2-4x+5}.$$

Vzhledem k příznivému tvaru funkce $f(x)$ bude vhodné jednostranné derivace v bodě 2 počítat podle definice.

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = -\frac{\pi}{2},$$
$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2}.$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. ▲

Příklad 4.31. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \big|\ln|x|\big|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Funkce $\ln x$ mění znaménko v bodě $x = 1$, takže funkce $\ln|x|$ bude měnit znaménko v bodech $x = -1$ a $x = 1$ (je to konečně sudá funkce). Snadno vidíme, že

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{pro } x \in (-\infty, -1\rangle, \\ -\ln(-x) & \text{pro } x \in \langle -1, 0), \\ -\ln x & \text{pro } x \in (0, 1\rangle, \\ \ln x & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in (-\infty, -1), && f'_-(-1) = -1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x} && \text{pro } x \in (-1, 0), && f'_+(-1) = 1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{x} && \text{pro } x \in (0, 1), && f'_-(1) = -1, \\ f'(x) &= \frac{1}{x} && \text{pro } x \in (1, +\infty), && f'_+(1) = 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme např. zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sign}(|x|-1)}{x}.$$

▲

Příklad 4.32. Vypočtěte $f^{(6)}$ a $f^{(7)}$ funkce $f(x) = x(2x-1)^2(x+3)^3$.

Řešení. Uvažovaná funkce je zřejmě polynomem stupně 6. Tedy $D_f = D_{f^{(6)}} = D_{f^{(7)}} = (-\infty, +\infty)$. Obecně snadno vidíme, že m-tá derivace polynomu stupně n při $m > n$ je rovna nule. Tedy $f^{(7)} = 0$. K výpočtu šesté derivace použijeme Leibnizovu formuli:

Podle věty o limitě derivace zde bez nesnází zjistíme, že $f'_+(-a) = 0$ a $f'_-(a) = 0$. Můžeme potom napsat

$$f'(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{na } \langle -a, a \rangle,$$

kde v krajních bodech opět rozumíme příslušné jednostranné derivace. ▲

Příklad 4.12. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |x|$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$. Zde je výhodné napsat

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty), \end{cases}$$

neboť odtud ihned plyne, že

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \qquad f'_-(0) = -1, \\ f'(x) &= 1 \qquad \text{pro } x \in (0, +\infty), \qquad f'_+(0) = 1. \end{aligned}$$

Z těchto výsledků vidíme podle Věty 4.3, že funkce $f(x) = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci a že $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Můžeme napsat

$$f'(x) = \operatorname{sign} x \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

Podotkněme ještě, že výskyt absolutní hodnoty ve vyjádření funkce mnohdy způsobuje, že funkce v některých bodech nemá derivaci. Nemusí tomu ale tak být vždy, jak ukazuje následující příklad. ▲

Příklad 4.13. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = x \cdot |x|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Opět použijeme postupu, který jsme viděli v předchozím příkladě. Můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \qquad f'_-(0) = 0, \\ f'(x) &= 2x \qquad \text{pro } x \in (0, +\infty), \qquad f'_+(0) = 0. \end{aligned}$$

Vidíme především, že $f'(0) = 0$, a tedy $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Celkem můžeme napsat

$$f'(x) = 2\,|x|.$$

Závěrem si povšimněme následující skutečnosti. Funkce $f(x) = x \cdot |x|$ má tvar součinu, má v bodě 0 vlastní derivaci, ale tuto derivaci nemůžeme vypočíst podle Věty 4.1 bod c), neboť jedna funkce ze součinu — totiž funkce $|x|$ — nemá v bodě 0 derivaci (což jsme viděli v předchozím příkladě). ▲

Je tedy $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ a platí

$$f'(x) = \left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,.$$

▲

3 **Příklad 4.18.** Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = [x]\sin^2 \pi x$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Na základě našich zkušeností s funkcí $[x]$ víme, že je vhodné uvažovat interval $\langle n, n+1)$, kde n je celé (samozřejmě může být též záporné). Na tomto intervalu zřejmě je

$$f(x) = n\sin^2 \pi x,$$

a tudíž

$$f'(x) = n \cdot 2\sin \pi x \cos \pi x \cdot \pi = \pi n \sin 2\pi x \qquad \text{pro } x \in (n, n+1), \qquad f'_+(n) = 0.$$

Zbývá tedy určit $f'_-(n+1)$. Pokusíme se opět použít větu o limitě derivace. Za tím účelem ukažme nejprve, že funkce $f(x)$ je v bodě $n+1$ spojitá zleva:

$$f(n+1) = [n+1]\sin^2 \pi(n+1) = (n+1)\cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{x\to(n+1)-} f(x) = \lim_{x\to(n+1)-} n\sin^2 \pi x = 0.$$

Dále

$$\lim_{x\to(n+1)-} f'(x) = \lim_{x\to(n+1)-} (\pi n \cdot \sin 2\pi x) = 0,$$

odkud vyplývá, že $f'_-(n+1) = 0$. Na základě těchto výsledků snadno vidíme, že funkce $f(x)$ má vlastní derivaci i v každém celočíselném bodě n, přičemž platí $f'(n) = 0$. Můžeme tedy napsat, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a že

$$f'(x) = \begin{cases} \pi n \cdot \sin 2\pi x & \text{pro } x \in (n, n+1), \\ 0 & \text{pro } x = n. \end{cases}$$

Chceme-li výsledek zapsat v hezčím tvaru (uvědomte si, že na intervalu $\langle n, n+1)$ je $[x] = n$), můžeme psát

$$f'(x) = \pi[x]\sin 2\pi x.$$

▲

Příklad 4.19. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ (1-x)(2-x) & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ -(2-x) & \text{pro } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Použijeme opět naší osvědčené metody. Můžeme psát:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pro } x \in (-\infty, 1\rangle, \\ (1-x)(2-x) & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle, \\ -(2-x) & \text{pro } x \in \langle 2, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{array}{lll} f'(x) = -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), & f'_-(1) = -1, \\ f'(x) = 2x - 3 & \text{pro } x \in (1, 2), & f'_+(1) = -1, \quad f'_-(2) = 1, \\ f'(x) = 1 & \text{pro } x \in (2, +\infty), & f'_+(2) = 1. \end{array}$$

Vidíme ihned, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ 2x - 3 & \text{pro } x \in \langle 1, 2 \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

▲

Příklad 4.20. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Povšimněme si, že můžeme napsat

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a\rangle, \\ (x-a)^2(x-b)^2 & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \in \langle b, +\infty). \end{cases}$$

Odtud získáme ihned

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 0 & \text{pro } x \in (-\infty, a), & f'_-(a) = 0, \\ f'(x) = 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{pro } x \in (a, b), & f'_+(a) = 0, \quad f'_-(b) = 0, \\ f'(x) = 0 & \text{pro } x \in (b, +\infty), & f'_+(b) = 0. \end{array}$$

Zase vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b) & \text{pro } x \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{všude jinde.} \end{cases}$$

▲

(5) **Příklad 4.21.** Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$ a opět můžeme napsat

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle, \\ \ln(1+x) & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{array}{lll} f'(x) = 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), & f'_-(0) = 1, \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & \text{pro } x \in (0, +\infty), & f'_+(0) = 1. \end{array}$$

1 **Příklad 4.16.** Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |\sin^3 x|$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Kvůli absolutní hodnotě budeme dávat pozor na intervaly, kde $\sin^3 x \geq 0$ a kde $\sin^3 x \leq 0$. Jsou to zřejmě intervaly tvaru $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$. Na intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ pro k *sudé* dostáváme

$$f(x) = |\sin^3 x| = \sin^3 x,$$

odkud

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos x \quad \text{pro } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad f'_+(k\pi) = 0, \quad f'_-((k+1)\pi) = 0.$$

Na intervalu $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ pro k *liché* dostáváme

$$f(x) = |\sin^3 x| = -\sin^3 x,$$

odkud

$$f'(x) = -3\sin^2 x \cos x \quad \text{pro } x \in (k\pi, (k+1)\pi), \quad f'_+(k\pi) = 0, \quad f'_-((k+1)\pi) = 0.$$

Vidíme tedy, že pro libovolné k celé je $f'_-(k\pi) = f'_+(k\pi) = 0$ a že tedy (podle Věty 4.3) $f'(k\pi) = 0$. Odtud ihned plyne, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$. Abychom mohli $f'(x)$ vyjádřit pomocí jediné formule, povšimněme si, že můžeme psát

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sin x & \text{pro } x \in \langle k\pi, (k+1)\pi\rangle, \quad \text{je-li } k \text{ sudé}, \\ -\frac{3}{2}\sin 2x \cdot \sin x & \text{pro } x \in \langle k\pi, (k+1)\pi\rangle, \quad \text{je-li } k \text{ liché}. \end{cases}$$

(Zde $f'(x)$ značí v každém bodě oboustrannou derivaci!) Potřebovali bychom tedy funkci, která se rovná $\sin x$ na intervalech $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ s k sudým a která se rovná $-\sin x$ na intervalech $\langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ s k lichým. To je ale zřejmě funkce $|\sin x|$. Můžeme tedy závěrem napsat

$$|\sin^3 x|' = \frac{3}{2}\sin 2x \cdot |\sin x|.$$

▲

2 **Příklad 4.17.** Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arccos \dfrac{1}{|x|}$.

Řešení. Zřejmě $D_f = \{x; \frac{1}{|x|} \leq 1\} = \{x; |x| \geq 1\} = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$.

Na $(1, +\infty)$ dostáváme

$$f'(x) = \left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Na $(-\infty, -1)$ dostáváme

$$f'(x) = \left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{x^2} =$$

$$= -\frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{-x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Podle věty o limitě derivace dostáváme navíc

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1-} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\infty, \qquad f'_+(1) = \lim_{x \to 1+} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty.$$

18. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací). Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce). Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce). Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$ (respektive $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$).

Věta 5. Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \to a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+} f'(x).$$

Levá strana analogicky.

Vidíme tak, že $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ \frac{1}{1+x} & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty). \end{cases}$$

▲

6

Příklad 4.22. Vypočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{pro } |x| \le 1, \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sign} x + \frac{x-1}{2} & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Zřejmě opět můžeme psát

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} & \text{pro } x \in (-\infty, -1), \\ \operatorname{arctg} x & \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle, \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} & \text{pro } x \in \langle 1, +\infty). \end{cases}$$

Zde je trochu nepříjemné, že hodnota funkce $-\frac{\pi}{4}+\frac{x-1}{2}$ v bodě -1 není rovna hodnotě funkce $\operatorname{arctg} x$ v bodě -1, takže nemůžeme napsat $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}$ pro $x \in (-\infty, -1\rangle$. Každopádně však z předchozího vyjádření funkce $f(x)$ ihned plyne

$$f'(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{pro } x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{pro } x \in (-1, 1), \qquad f'_+(-1) = \frac{1}{2},\ f'_-(1) = \frac{1}{2},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{pro } x \in (1, +\infty), \qquad f'_+(1) = \frac{1}{2}.$$

Zbývá tedy jediná otázka — jak vypadá $f'_-(-1)$. Snadno vidíme, že

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - 1, \qquad f(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Funkce f není tedy v bodě -1 spojitá zleva a odtud je ihned jasné, že pokud $f'_-(-1)$ existuje, může být pouze nevlastní. (Připomeňme, že má-li funkce v bodě vlastní derivaci resp. vlastní derivaci zleva resp. vlastní derivaci zprava, je v tomto bodě spojitá resp. spojitá zleva resp. spojitá zprava). K důkazu existence $f'_-(-1)$ nemůžeme použít větu o limitě derivace, neboť bohužel není splněn předpoklad spojitosti funkce f v bodě -1 zleva. Nezbývá než použít definici derivace:

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1-} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x\to -1-} \frac{\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to -1-} \frac{\frac{x-1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to -1-}\frac{x-1}{x+1} = +\infty.$$

Tím je vyšetřování derivace ukončeno. Zřejmě $D_{f'} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{pro } x \in (-1, 1\rangle, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } |x| > 1. \end{cases}$$

▲

Ihned vidíme, že $D_{f'} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ a že platí

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) & \text{pro } x \in (-\infty, 1), \\ -2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) & \text{pro } x \in (1, 3\rangle, \\ 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9) & \text{pro } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Chceme-li vyjádřit $f'(x)$ jedinou formulí, potřebujeme funkci $\varrho(x)$ takovou, že

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty), \\ -1 & \text{pro } x \in (1, 3). \end{cases}$$

Lze si ale všimnout, že takovou funkcí je funkce $\varrho(x) = \operatorname{sign}(x-1)\operatorname{sign}(x-3)$. Takže můžeme napsat

$$f'(x) = 2\operatorname{sign}(x-1)\cdot\operatorname{sign}(x-3)\cdot(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).$$

▲

Příklad 4.25. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = |\pi^2 - x^2|\sin^2 x$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Kvůli absolutní hodnotě vyskytující se ve vyjádření funkce $f(x)$ budeme uvažovat intervaly $(-\infty, -\pi\rangle$, $\langle-\pi, \pi\rangle$, $\langle\pi, +\infty)$. Můžeme zřejmě psát

$$f(x) = \begin{cases} (x^2-\pi^2)\sin^2 x & \text{pro } x \in (-\infty, -\pi\rangle \cup \langle\pi, +\infty), \\ (\pi^2-x^2)\sin^2 x & \text{pro } x \in \langle-\pi, \pi\rangle. \end{cases}$$

Odtud

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\sin^2 x + (x^2-\pi^2)\,2\sin x\cos x \\ &= 2\sin x\big(x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\big) \qquad \text{pro } x \in (-\infty, -\pi)\cup(\pi, +\infty), \\ & f'_-(-\pi) = 0, \qquad f'_+(\pi) = 0, \\ f'(x) &= -2\sin x\big(x\sin x + (x^2-\pi^2)\cos x\big) \qquad \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ & f'_+(-\pi) = 0, \qquad f'_-(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, +\infty)$ a celkový výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(x) = -2\operatorname{sign}(\pi^2-x^2)\sin x\big(x\sin x + (\pi^2-x^2)\cos x\big).$$

▲

7 **Příklad 4.26.** Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Řešení. Zřejmě $D_f = (-\infty, +\infty)$, neboť oborem hodnot funkce $\sin x$ je interval $\langle-1, 1\rangle$ a tentýž interval je definičním oborem funkce $\arcsin y$. Funkce $\arcsin y$ se zavádí jako funkce inverzní k funkci $\sin x$, což svádí k tomu, napsat $\arcsin(\sin x) = x$. Toto je zásadní chyba, neboť je třeba si uvědomit, že funkci $\arcsin y$ definujeme jako inverzní funkci k funkci $\sin x$ uvažované pouze na intervalu $\left\langle-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Platí tedy $\arcsin(\sin x) = x$, ale pouze pro $x \in \left\langle-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Pro detailní rozbor funkce $\arcsin(\sin x)$ je dobré si povšimnout, že tato funkce je periodická s periodou 2π (díky tomu, že je taková funkce $\sin x$). Stačí ji tedy uvažovat na intervalu délky 2π. My si vybereme interval $\left\langle-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

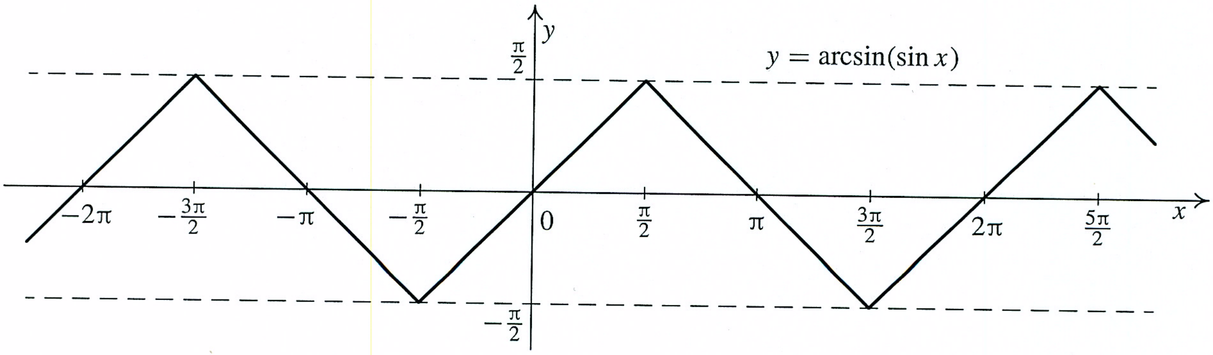
Na intervalu $\left\langle-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, jak již bylo řečeno, máme

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

Na intervalu $\left\langle\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$ potom dostáváme

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin x) &= \arcsin\big(\sin\big((x-\pi)+\pi\big)\big) = \\ &= \arcsin\big(-\sin(x-\pi)\big) = -\arcsin\big(\sin(x-\pi)\big) = -(x-\pi) = \pi - x, \end{aligned}$$

neboť $x - \pi \in \left\langle-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. Pro lepší zapamatování uvedeme graf funkce $\arcsin(\sin x)$. (Pro jeho nakreslení využijeme periodičnosti!)



Z předchozích výsledků ihned plyne:

$$f'(x) = 1 \qquad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \qquad f'_+\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad f'_-\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$f'(x) = -1 \qquad \text{pro } x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \qquad f'_+\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad f'_-\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Odtud (s použitím periodičnosti) snadno vidíme, že definiční obor derivace je

$$D_{f'} = (-\infty, +\infty) \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

a že

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{pro } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

▲

Příklad 4.27. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \dfrac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Řešení. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Pro $x \neq 0$ vypočteme

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\right)' = \frac{\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x\left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Zbývá vyšetřit, zda existuje derivace nebo zda existují alespoň jednostranné derivace v bodě 0. Zde je asi nejlépe, povšimneme-li si poměrně technicky výhodného tvaru funkce $f(x)$ a začneme počítat $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$ podle definice.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Tedy $D_{f'} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ a $f'(x)$ pro $x \neq 0$ je určeno výše uvedenou formulí. Pokud se nerozhodneme počítat $f'_-(0)$ a $f'_+(0)$ podle definice, můžeme ještě použít větu o limitě derivace. Tento postup ale, jak ihned uvidíme, je zde podstatně technicky náročnější. Předně, abychom větu o limitě derivace mohli použít, musíme ověřit, zda funkce $f(x)$ je v bodě 0 spojitá.

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0-} x}{\lim\limits_{x \to 0-} \left(1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{0}{1} = 0 = f(0),$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0+} x \cdot \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}} = 0 \cdot 0 = 0 = f(0).$$

Příklad 7.14. Má následující funkce derivaci v nule?

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x \log 2} - \frac{1}{2^x - 1}, & x \neq 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Příklad 7.15. Dokažte, že každá z následujících dvou rovnic má právě jeden kořen.

$$x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$
$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Výsledky

- Příklad 7.10:

4

  - Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3 \rangle + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3 \rangle + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\,\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$f'_+(\pi/3 + 2k\pi) = \lim_{x \to \pi/3 + 2k\pi +} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$$
$$f'_-(\pi/3 + 2k\pi) = \lim_{x \to \pi/3 + 2k\pi -} 0 = 0,$$
$$f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$
$$f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2,$$
$$f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2,$$
$$f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$
$$f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) = 0,$$
$$f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) = -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \ k \in \mathbb{Z}.$$

  - Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1 - e^{x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \to 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

* $\lim_{y \to 0+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
* $\lim_{x \to 0} -x^2 = 0$,
* $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
* $\sqrt{\ }$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = 1.$$