21. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

Určete (absolutní i neabsolutní) konvergenci řad

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{k^2+1})$. [Konverguje neabsolutně.]

   Návod: Platí, že

$$\sin(\pi\sqrt{k^2+1}) = \sin(\pi\sqrt{k^2+1} - k\pi + k\pi) =$$

$$= \sin(\pi\sqrt{k^2+1}-k\pi)\cos(k\pi) - \cos(\pi\sqrt{k^2+1}-k\pi)\sin(k\pi) = (-1)^k \sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}.$$

   Neabsolutní konvergence podle Leibnizova kritéria je nyní zřejmá. Jak je to ale s tou absolutní? Platí, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}} \cdot \frac{\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}}{\frac{1}{2k}} = 1.$$

   Protože řada $\frac{1}{2k}$ diverguje, podle limitní verze srovnávacího kritéria musí divergovat také řada původní. Absolutní konvergence je tak vyloučena.

   $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} - 1\right)$. [Konverguje absolutně.]

   Návod: Neabsolutní konvergence je zřejmá z faktu, že

$$\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} = \sqrt[k]{1-\frac{1}{k^2+1}} \nearrow 1.$$

   Co se týče absolutní konvergence, všimněte si nejprve, že

$$\left|(-1)^k\left(\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}-1\right)\right| = 1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}.$$

   Známé aproximační vzorce nám pomohou získat vhled:

$$1 - \sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}} = 1 - \left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)^{1/k} \approx 1 - 1 + \frac{1}{k(k^2+1)} \approx \frac{1}{k^3}.$$

   Řada by tedy měla být absolutně konvergentní. Pro důkaz by se mělo hodit použít srovnávací limitní kritérium a spočítat třeba limitu (což vyžaduje trochu šikovnosti)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1-\sqrt[k]{\frac{k^2}{k^2+1}}}{\frac{1}{k^3}} =$$

Příklad M. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\ln(n^2+n)}{n^2}. \tag{M.1}$$

Řešení. Ze stejného důvodu jako v předchozím příkladě nemá smysl použít podílové nebo odmocninové kritérium. Technikami známými z výpočtů limit upravíme členy zadané řady, abychom našli řadu, se kterou budeme srovnávat:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}$$

$$\ln(n^2+n) = \ln\left(n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln n^2 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2\ln n\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\ln n}\right)$$

Vyjádřili jsme tedy členy řady (M.1) (označme je a_n) ve tvaru

$$a_n = \frac{4\ln n\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\ln n}\right)}{n^2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)},$$

jehož smysl tkví v tom, že nahrazením závorek jejich konečnými nenulovými limitami 1 (čitatel) resp. 2 (jmenovatel) dostaneme podstatně zjednodušený výraz vhodný jako člen srovnávací řady $\sum b_n$:

$$b_n = \frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}}$$

Dokázat ekvivalenci konvergence obou řad je nyní triviální:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4\ln n\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2\ln n}\right)}{n^2\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}}{\frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}}} = 1 \in (0,\infty)$$

Členy srovnávací řady $\sum b_n$ jsou již maximálně zjednodušené, konvergenci této řady však neznáme. Je třeba opět použít srovnávací kritérium (tentokrát v nelimitní verzi) a porovnat řadu s nějakou řadou, jejíž konvergenci již budeme znát. Zde se nabízí použití řady $\sum\frac{1}{n^\alpha}$, nejprve nás patrně napadne $\alpha=\frac{5}{2}$. Tento pokus je však odsouzen k neúspěchu:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} 2\ln n = \infty,$$

skoro všechny členy řady $\sum b_n$ jsou tedy větší než členy konvergentní řady $\sum\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$, z čehož pochopitelně plyne jediný závěr, a to, že toto srovnání je k ničemu (poznamenejme, že pokud by byl člen $\ln n$ ve jmenovateli, byla by nerovnost opačná a příklad by byl vyřešen). Obtížný logaritmus v čitateli však můžeme „zneutralizovat" libovolně malou mocninou n:

$$\frac{2\ln n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{2\ln n}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{pro s.v. } n,$$

protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\sqrt{n}} = 0,$$

což plyne ze vztahu $\ln^{k_1} n \ll n^{k_2}$ pro $k_1,k_2>0$. Členy řady b_n jsme tedy shora omezili členy konvergentní řady $\sum\frac{1}{n^2}$ (říkáme také, že tato řada je pro řadu b_n *konvergentní majorantou*), a tedy $\sum b_n$ i řada (M.1) absolutně konvergují.

Příklad N. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \operatorname{tg} \frac{n^2}{2^n}. \tag{N.1}$$

Řešení. Příklady, ve kterých se vyskytuje transcendentní elementární funkce, jejímž argumentem je posloupnost jdoucí k nule (což zde plyne ze vztahu $n^k \ll q^n$ pro $k > 0$, $q > 1$), řešíme zpravidla na základě znalosti chování takové funkce v okolí nuly. V případě funkce $\operatorname{tg} x$ víme, že pro každé $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ platí $\operatorname{tg} x \geq x$, čímž máme odhad funkce zdola. Zároveň $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a protože např. pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $\cos x \geq \frac{1}{2}$ (plyne to z toho, že funkce $\cos x$ je na tomto intervalu klesající a $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$) a $\sin x \leq x$, je na témž intervalu $\operatorname{tg} x \leq \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$ (nerovnost plyne z toho, že jsme „zvětšili čitatel" a „zmenšili jmenovatel"), což je omezení $\operatorname{tg} x$ shora. Interval platnosti zde není omezením – konverguje-li posloupnost kladných čísel k nule, bude libovolný interval $(0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ obsahovat skoro všechny její členy. Řada $\sum \operatorname{tg} a_n$, kde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ tedy bude konvergovat právě tehdy, když bude konvergovat $\sum a_n$, protože její členy omezují $\operatorname{tg} a_n$ zdola a členy posloupnosti $\sum 2a_n$, jejíž konvergence je ekvivalentní, shora. Zjistíme tedy nejprve, zda konverguje argument a pak pomocí něj omezíme vyšetřovanou řadu shora nebo zdola. Řada $\sum \frac{n^2}{2^n}$ je typickou řadou vhodnou pro užití podílového kritéria:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

a řada tedy konverguje. Podle předchozího odstavce tedy omezíme členy řady (N.1) shora:

$$\operatorname{tg} \frac{n^2}{2^n} \leq 2 \cdot \frac{n^2}{2^n} \quad \text{pro s.v. } n$$

a můžeme konstatovat, že řada (N.1) konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

Shrňme známé vlastnosti elementárních funkcí, které umožní jejich odhady v okolí nuly, resp. dalších důležitých bodů. Z předchozího odstavce máme pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$: $x \leq \operatorname{tg} x \leq 2x$. Tento odhad však můžeme použít jen tehdy, je-li vnitřní posloupnost nezáporná. Z lichosti všech tří funkcí v nerovnosti však snadno dostaneme analogický odhad pro x nekladná: je-li $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, 0\rangle$, platí $-x \leq \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \leq -2x$, neboli $x \geq \operatorname{tg} x \geq 2x$. Odhady pro nezáporná a nekladná x můžeme shrnout do jednoho: pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\rangle$ je $|x| \leq |\operatorname{tg} x| \leq 2|x|$.

Poznamenejme, že horní odhad lze zlepšit (tedy snížit), protože omezíme-li se na kratší interval (což lze, protože konverguje-li vnitřní posloupnost k nule, stačí odhad na libovolně malém intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$), můžeme zvýšit minimální hodnotu $\cos x$ na tomto intervalu (např. pro $x \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\rangle$ platí $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ a tedy $|\operatorname{tg} x| \leq \frac{2|x|}{\sqrt{3}}$). Z předchozího odstavce je zřejmé, že v tomto případě by takové zlepšení nemělo smysl, v jiných příkladech (např. při použití nelimitního odmocninového kritéria) však ano. Další zlepšení umožňuje odhad funkce $\cos x$ nikoli konstantou, ale funkcí, což však překračuje rámec tohoto textu. Na rozdíl do horního odhadu uvedený spodní odhad zlepšit nelze (resp. ne multiplikativní konstantou) – pro žádné $\alpha > 1$ neplatí $\alpha|x| \leq |\operatorname{tg} x|$ na žádném intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, což plyne okamžitě z toho, že horní odhad můžeme zkracováním intervalu snížit na libovolné $\alpha|x|$, $\alpha > 1$ (protože $\cos x$ je v dostatečně malém intervalu kolem nuly větší než $\frac{1}{\alpha}$).

Věnujme se nyní odhadům dalších funkcí. Víme, že pro $x \in \langle 0, \infty)$ je $\sin x \leq x$, máme tedy odhad funkce $\sin x$ shora. Zároveň pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2})$ platí $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \geq x$, neboli $\sin x \geq x \cos x$. Stejně jako při odvození odhadu $\operatorname{tg} x$ se můžeme omezit na interval $\langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$, kde platí $\cos x \geq \frac{1}{2}$ a tedy pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$ máme $\frac{x}{2} \leq \sin x \leq x$. Stejně jako u $\operatorname{tg} x$ můžeme použít lichost pro odhad v záporných x a dostaneme univerzální odhad: pro každé $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $\frac{|x|}{2} \leq |\sin x| \leq |x|$. V tomto případě lze volbou užšího intervalu zlepšit dolní odhad, a to na $\alpha|x|$, kde $\alpha < 1$.

Odhady funkce $\operatorname{cotg} x$ můžeme velice snadno odvodit z již hotových odhadů pro $\operatorname{tg} x$. Pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ totiž platí $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, což spolu s odhady $\operatorname{tg} x$ dává pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{3} \rangle$ nerovnosti $\frac{1}{|x|} \geq \frac{1}{|\operatorname{tg} x|} = |\operatorname{cotg} x| \geq \frac{1}{2|x|}$. Odhad zdola lze zlepšit na $\frac{1}{\alpha|x|}$ pro $\alpha > 1$. Pro $x = 0$ nemá odhad pochopitelně smysl, protože v tomto bodě není funkce $\operatorname{cotg} x$ definována.

Zbývající goniometrickou funkci, $\cos x$, lze pomocí racionálních funkcí odhadnout také, tyto odhady však (byť je lze snadno odvodit ze získaných odhadů pro $\sin x$), překračují rámec tohoto textu. Pro naše účely postačí odhad pomocí konstant: pro $x \in \mathbb{R}$ je $\cos x \leq 1$ a např. pro $x \in \langle -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \rangle$ je $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Překvapivě snadno lze pomocí již odvozených vztahů získat odhady „nepříjemných" cyklometrických funkcí – stačí využít toho, že jsou definovány jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím zúženým na určitý interval. Například dosadíme-li do odhadu $|y| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |y| \leq |\operatorname{tg} y| \leq 2|y|$ za y výraz $\operatorname{arctg} x$, dostaneme $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow |\operatorname{arctg} x| \leq |\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x| \leq 2|\operatorname{arctg} x|$. Protože $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ a $\operatorname{arctg} x$ je rostoucí, lichá a spojitá funkce, je podmínka $|\operatorname{arctg} x| \leq \frac{\pi}{3}$ ekvivalentní s $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$. K funkci $\operatorname{arctg} x$ je (na celém $\mathbb{R}$) inverzní funkce $\operatorname{tg} x \restriction (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, proto je $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} x = x$. Po této úpravě můžeme dvojitou nerovnost $|\operatorname{arctg} x| \leq |x| \leq 2|\operatorname{arctg} x|$ rozepsat na dvě nerovnosti a pravou z nich dělit dvěma. Dostaneme výsledné odhady funkce $\operatorname{arctg} x$: pro každé $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$ je $\frac{|x|}{2} \leq |\operatorname{arctg} x| \leq |x|$. Provedeme-li popsanou substituci ve zlepšeném horním odhadu funkce $\operatorname{tg} x$ (viz výše), dostaneme zlepšený dolní odhad $\operatorname{arctg} x$.

Naprosto stejným postupem (který z tohoto důvodu ani neuvádíme) dostaneme odhady funkce $\arcsin x$: pro každé $x \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ je $|x| \leq |\arcsin x| \leq 2|x|$ s možností zlepšení horního odhadu.

Funkce $\operatorname{arccotg} x$ je inverzní k $\operatorname{cotg} x$ v intervalu $(0, \pi)$, proto se předem omezíme na kladná x. Podmínka $0 < y \leq \frac{\pi}{3}$ (vzniklá konjunkcí podmínky z odhadů $\operatorname{cotg} x$ a podmínkou kladnosti z předchozí věty) po substituci $y = \operatorname{arccotg} x$ dá nerovnosti $0 < \operatorname{arccotg} x \leq \frac{\pi}{3}$, z nichž levá je splněna vždy, pravá pro $x = \operatorname{cotg} \operatorname{arccotg} x \geq \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Změna nerovnosti je samozřejmě důsledkem toho, že funkce $\operatorname{cotg} x$ je na intervalu $(0, \pi)$ klesající. Interval platnosti odhadů pro $\operatorname{arccotg} x$ má tedy zásadně odlišný charakter, než je tomu v ostatních případech. Odvození samotných odhadujících nerovností je opět velice podobné předchozím a přenecháváme jej čtenáři jako cvičení. Výsledek: pro všechna $x \in \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \right)$ je $\frac{1}{x} \geq \operatorname{arccotg} x \geq \frac{1}{2x}$ s možností zlepšení dolního odhadu.

Posledními dvěma funkcemi, jejichž chování v okolí významných bodů je třeba znát, je e^x a $\ln x$. V prvním případě vyjdeme z nerovnosti $1 + x \leq \mathrm{e}^x$, která platí na celém $\mathbb{R}$ (algebraicky říká, že graf funkce e^x je všude „nad" grafem jeho tečny v bodě 0) a je horním odhadem. Dosazením $-x$ za x z ní, opět v celém $\mathbb{R}$, dostaneme $1 - x \leq \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ a odtud pro $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$ (aby se při dělení nerovnosti $1 - x$ nezměnila nerovnost) horní odhad $\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$. Vzhledem k rozdílnosti intervalu pro horní a dolní odhad je v tomto případě neuvádíme v jedné nerovnosti, i když tato nerovnost pro $x \in (-\infty, 1)$ samozřejmě platí.

Funkce $\ln x$ je inverzní k e^x na celém $\mathbb{R}$, proto můžeme opět dostat její odhady substitucí $y = \ln x$ v odhadech funkce e^y. V případě horního odhadu dostaneme pro $x \in \mathbb{R}^+$ nerovnost $1 + \ln x \leq \mathrm{e}^{\ln x} = x$, neboli $\ln x \leq x - 1$, což je dolní odhad $\ln x$. Poznamenejme, že ačkoli platí pro všechna kladná x, je podstatný hlavně v okolí bodu 1, často se také uvádí ve tvaru $\forall x \in (-1, \infty) : \ln(1 + x) \leq x$, což je odhad v okolí nuly. Z mezitvaru dolního odhadu funkce e^y máme pro $x \in \mathbb{R}^+$ mezitvar horního odhadu $\ln x$: $1 - \ln x \leq \mathrm{e}^{-\ln x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x}$, který snadno převedeme na výsledný $1 - \frac{1}{x} \leq \ln x$. Výhoda použití mezitvaru tkví nejen ve snazší algebraické úpravě, ale hlavně v širším oboru platnosti. Pokud bychom odvozovali z výsledného odhadu e^y, dostali bychom odhad jen pro $x \in (0, \mathrm{e})$ (rozmyslete si). Odhad se opět používá i ve tvaru pro okolí nuly $\forall x \in (-1,\infty) : 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x)$. V případě logaritmu jsou intervaly odhadů stejné, můžeme je tedy sjednotit do $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$, resp. $\forall x \in (-1,\infty) : \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$. Odhady e^x a $\ln x$ nelze zlepšit multiplikativní konstantou.

Zapamatovat si výše uvedené odhady v algebraické podobě je značně obtížné. Nejjednodušší je patrně grafická představa: dokážeme-li si představit grafy funkcí $\frac{x}{2}$, x a $2x$ a funkce $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ sevřené mezi prvními, resp. druhými dvěma funkcemi, a víme-li, že v nějakém okolí nuly (bez nuly samotné) platí $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ a že grafy funkcí k sobě inverzních jsou symetrické podle osy prvního a třetího kvadrantu (tedy podle přímky $y = x$), lze odhady goniometrických a cyklometrických funkcí velmi rychle odvodit. Oproti tomu u exponenciály a logaritmu je už obtížnější přesná představa omezujících racionálních funkcí, zatímco algebraické odvození je jednoduché, proto je patrně nejefektivnější graficky si pamatovat odhady přímkou (e^x zdola a $\ln x$ shora) a ostatní odvodit popsaným způsobem.

Ukažme si nyní použití odvozených odhadů na dalších příkladech.

Příklad O. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}}. \tag{O.1}$$

Řešení. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ spadají hodnoty $\sqrt{n}$ do intervalu $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \infty \right)$, pro který známe odhad funkce $\operatorname{arccotg} x$ (stačilo by ovšem, aby tam spadaly pro s.v. n). Protože nevíme, zda budeme potřebovat horní či dolní odhad, použijeme univerzální tvar s oběma odhady. Je tedy $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \operatorname{arccotg} \sqrt{n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, z čehož umocněním na druhou (což je zde korektní, protože všechny strany jsou nezáporné) a vynásobením n dostáváme $1 \geq n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n} \geq \frac{1}{4}$. Máme tedy odhad jmenovatele, převrácením získáme odhad členů řady:

$$1 \leq \frac{1}{n \operatorname{arccotg}^2 \sqrt{n}} \leq 4$$

a vidíme, že potřebujeme pouze odhad zdola (který ovšem vznikl převrácením odhadu $\operatorname{arccotg} \sqrt{n}$ shora), protože řada $\sum 1$ je na první pohled divergentní (její součet je zřejmě ∞, také nesplňuje nutnou podmínku konvergence řady), a tedy podle srovnávacího kritéria diverguje i řada (O.1).

Příklad P. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n. \tag{P.1}$$

Řešení. Členy této řady jsou nezáporné a jejich tvar vybízí k použití odmocninového kritéria, avšak v nelimitní verzi, protože spočíst limitu výrazu

$$\sqrt[n]{\left(n \arcsin \frac{1}{2n} \right)^n} = n \arcsin \frac{1}{2n}$$

je značně obtížné. Právě pro tyto případy však jsou určeny odhady. Posloupnost $\frac{1}{2n}$ má limitu 0 a skoro všechny její členy budou v libovolném intervalu, jehož je 0 vnitřním bodem. Můžeme tedy předpokládat, že $\frac{1}{2n} \in \langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \rangle$ a že tudíž

$$\frac{1}{2n} \leq \arcsin \frac{1}{2n} \leq 2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

(absolutní hodnoty vynecháváme, protože všechny výrazy jsou kladné), z čehož po vynásobení n máme

$$\frac{1}{2} \leq n \arcsin \frac{1}{2n} \leq 1.$$

Tento odhad však nestačí – abychom mohli říci, že řada podle odmocninového kritéria konverguje, museli bychom dokázat, že její členy jsou menší nebo rovny nějakému $q < 1$. Horní odhad $\arcsin x$ lze ovšem zlepšit, a to tak, že zlepšíme odhad $\sin x$ zdola a pomocí substituce přejdeme k inverzní funkci (viz postup výše).

Pro $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ je $|\sin y| \geq |y| \cos y$, stačí tedy odhadnout $\cos y$ zdola větší konstantou než $\frac{1}{2}$, která byla použita v odhadu, který jsme zkoušeli výše. To lze snadno: např. pro $y \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ je $\cos y \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, tedy $|\sin y| \geq \frac{|y|}{\sqrt{2}}$. Substitucí $y = \arcsin x$ dostáváme pro $x \in \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ odhad $|x| \geq \frac{|\arcsin x|}{\sqrt{2}}$, neboli $|\arcsin x| \leq \sqrt{2}|x|$.

Zopakujeme předchozí postup s novým odhadem (tentokrát už jen shora):

$$\arcsin \frac{1}{2n} \leq \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

a po vynásobení n dostáváme

$$n \arcsin \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1,$$

čímž jsme podle odmocninového kritéria dokázali, že řada absolutně konverguje.

Příklad Q. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

$$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2 + 2}. \tag{Q.1}$$

Řešení. Jde o typickou alternující řadu (tedy řadu se střídavými znaménky). Speciálně pro tyto řady je určeno Leibnizovo kritérium, které má ovšem nevýhodu: lze pomocí něj zjistit jen neabsolutní konvergenci, divergenci a absolutní konvergenci nikoli. Doporučený postup pro alternující řady je tedy následující: nejprve zkusíme nutnou podmínku konvergence, pokud je splněna, zkoumáme absolutní konvergenci (v případě, že vidíme, že řada absolutně konverguje, můžeme nutnou podmínku přeskočit) a pouze v případě, že řada nekonverguje absolutně, zkoušíme ověřit předpoklady Leibnizova kritérias. Protože jeden je shodný s nutnou podmínkou konvergence a byl již ověřen, dokážeme pouze, že posloupnost absolutních hodnot členů řady je (alespoň od nějakého členu dále) nerostoucí. To provedeme z definice – posloupnost (a_n) je nerostoucí od n_0-tého členu, pokud pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_{n+1} \leq a_n$.

Proveďme nyní doporučený postup pro řadu (Q.1). Označme členy řady (Q.1) a_n. Nutná podmínka konvergence je splněna, protože

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} = 0.$$

Zkusme tedy absolutní konvergenci. Řada $\sum |a_n|$ splňuje nutnou podmínku konvergence, zároveň však neobsahuje žádný člen rostoucí alespoň jako geometrická posloupnost, proto nemá smysl použití podílového a odmocninového kritéria. Použijeme kritérium srovnávací – (limitně) největší členy v čitateli a jmenovateli budou tvořit čitatel a jmenovatel členů srovnávací řady:

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

a protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2} = 1 \in (0, \infty),$$

a harmonická řada $\sum b_n$ diverguje ($\alpha = 1$, viz výše), diverguje i řada $\sum |a_n|$ a tedy řada (Q.1) nekonverguje absolutně.

Zkusme tedy aplikovat Leibnizovo kritérium. Zjistíme, zda je posloupnost $(|a_n|)$ nerostoucí. Znamená to řešit nerovnost

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{(n+1)^2+2} &\leq \frac{n}{n^2+2}\\(n+1)(n^2+2) &\leq n(n^2+2n+3)\\n^3+n^2+2n+2 &\leq n^3+2n^2+3n\\2 &\leq n^2+n\end{aligned}$$

Přesné řešení (tj. nalezení všech n, která takovou nerovnost splňují) by vyžadovalo řešení kvadratické nerovnice, to je však v tomto případě zbytečně složité. Stačí vědět, že výsledná nerovnost (kterou jsme dostali ekvivalentními úpravami nerovnosti původní), je splněna pro s.v. n. To je však snadné – už pro $n = 1$ je nerovnost splněna a pravá strana je jako součet rostoucích posloupností rostoucí, tedy pro všechna $n > 1$ bude nerovnost splněna také. Obecněji lze argumentovat tak, že posloupnost vpravo má limitu ∞, skoro všechny její členy tedy musí být větší než 2. Tím jsme ověřili druhou podmínku Leibnizova kritéria a můžeme říci, že řada (Q.1) neabsolutně konverguje.

Příklad R. Určete konvergenci a absolutní konvergenci řady

(R.1) $$\sum \cos(n\pi) \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}.$$

Řešení. Řada je alternující, protože $\cos(n\pi) = (-1)^n$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$ a druhý člen nemění znaménko: pro každé $n > 1$ je $0 < \frac{n^2-1}{n^2+1} < 1$ a tedy $\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} < 0$. Označme členy řady (R.1) a_n a protože od nynějška budeme pracovat už jen s jejich absolutními hodnotami (v nutné podmínce, případně absolutní konvergenci a Leibnizově kritériu), poněkud je zjednodušíme:

$$|a_n| = \left|(-1)^n \ln \frac{n^2-1}{n^2+1}\right| = -\ln \frac{n^2-1}{n^2+1} = \ln \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

Nutná podmínka konvergence je splněna:

(R.2) $$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2-1} = 0,$$

což plyne ze spojitosti funkce $\ln x$ v bodě 1 nebo také z odhadu $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$ – protože $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1} = 1$, jsou skoro všechny členy posloupnosti $\frac{n^2+1}{n^2-1}$ v intervalu platnosti odhadu, a tedy

$$1 - \frac{1}{\frac{n^2+1}{n^2-1}} = \frac{2}{n^2+1} \leq \ln \frac{n^2+1}{n^2-1} \leq \frac{n^2+1}{n^2-1} - 1 = \frac{2}{n^2-1}.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2-1} = 0,$$

platí podle věty o limitě sevřené posloupnosti („o dvou policajtech“) i (R.2). Použitý odhad však nabízí mnohem více, než jen ověření nutné podmínky konvergence. Velmi snadno pomocí něj rozhodneme i další test alternující řady, absolutní konvergenci. Řady $\sum \frac{2}{n^2+1}$ i $\sum \frac{2}{n^2-1}$ lze pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnat s řadou $\sum \frac{2}{n^2}$, o které víme, že konverguje (viz příklad L). Proto s ní srovnáme řadu horních odhadů – to nám následně umožní pomocí nelimitní verze srovnávacího kritéria ověřit konvergenci řady $\sum |a_n|$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2-1}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-1} = 1 \in (0, \infty),$$

konvergence řad $\sum \frac{2}{n^2-1}$ a $\sum \frac{2}{n^2}$ je tedy ekvivalentní a protože druhá z nich konverguje, konverguje i první. Ta je ovšem konvergentní majorantou řady $\sum |a_n|$, která tudíž také konverguje. To znamená, že řada (R.1) konverguje absolutně a použít Leibnizovo kritérium již není třeba.

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}}_{a_n} \quad ; \qquad x \in \mathbb{R}$$

(a) $x = 0 \rightarrow a_n \equiv 0$ AK

(b) $x > 0 \rightarrow a_n \geq 0$

$$b_n = \left(\frac{x}{\sqrt{n}\ln n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(x/(\sqrt{n}\ln n))}{x/(\sqrt{n}\ln n)} = 1$$

Heine $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

$$x_n = \frac{x}{\sqrt{n}\ln n} \qquad x_n \to 0 \qquad x_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

tedy $\sum a_n$ K $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ K

$\sum \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}$ D ze školy $\sum n^\alpha \ln^\beta n$

tedy $\sum a_n$ D.

(c) $x < 0$ budeme zkoumat $\sum -(a_n)$. Analogicky

$$\sum \underbrace{\sin^2 \frac{x}{\sqrt{n}\ln n}}_{a_n \geq 0} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) $x = 0 \rightarrow a_n = 0 \qquad \sum$ AK

(b) $x \neq 0$

$$b_n = \frac{x^2}{(\sqrt{n}\ln n)^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \underset{\text{Heine}}{\overset{}{=}} 1$$

$$x_n = \frac{x^2}{n \ln^2 n} \qquad x_n \to 0 \quad x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin^2 y}{y^2} = 1$$

tedy $\qquad \sum a_n$ K $\iff \sum \frac{x^2}{n \ln^2 n}$ K (víme ze školy)

závěr $\sum a_n$ K (a to absolutně)

$\sum \left(\cos \frac{a}{n}\right)^n \qquad a \in \mathbb{R}$

- $a \neq 0$

$\lim a_n = 1$

Heine $x_n = n$, $x_n \to \infty$, $x_n \neq \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^x = \lim e^{x \ln\left(\cos \frac{a}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \cos \frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} x \frac{\ln\left(\cos \frac{a}{x}\right)}{\left(\cos \frac{a}{x}\right) - 1} \cdot \left(\cos \frac{a}{x} - 1\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{\ln\left(\cos \frac{a}{x}\right)}{\cos \frac{a}{x} - 1}}_{\downarrow \; 1} \cdot \underbrace{\frac{1-\cos \frac{a}{x}}{\frac{a^2}{x^2}}}_{\downarrow \; 1/2} \cdot \underbrace{\frac{a^2}{x^2} \cdot (-x)}_{\downarrow \; 0} \overset{\text{VOTK}}{=} 0$$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$

(S) cos spoj. u 0

$\lim_{y\to 0} \cos y = 1$

- $\lim_{z\to 1} \frac{\ln z}{z-1} = 1$ (P) $\cos y \neq 1$ na $P^{\text{OP}}(0)$

- $\lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}$ (P) $\frac{a}{x} \neq 0$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $\lim_{u\to 0} e^u = 1$ (S) e^u spoj. u 0

- $a = 0$ $\qquad a_n \equiv 1$

Zaključ $\sum$ div., ne ispunjuje NP konvergencije

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{n^2+4}{n(n-1)}\right)}_{a_n}$$

Hypotéza

$$\frac{n^2+4}{n(n-1)} \geq 1$$

$$\cancel{n^2}+4 \geq \cancel{n^2}-n \quad \rightarrow \quad a_n \geq 0 \quad \text{pro } n \in \{2, 3, \dots\}$$

$$n \geq -4$$

LSK s $b_n = \frac{n^2+4}{n(n-1)} - 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{\uparrow}{=} 1$$

Heine

$$x_n = \frac{n^2+4}{n^2-n} \qquad x_n \to 1 \qquad \lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$$

$x_n \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

tedy $\sum a_n$ K $\iff \sum \frac{n^2+4}{n^2-n} - 1$ K

$$\sum \frac{\cancel{n^2}+4-\cancel{n^2}+n}{n^2-n} = \sum \underbrace{\frac{n+4}{n^2-n}}_{b_n}$$

srovnáním s $c_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+4}{n^2-n}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{4}{n}}{1-\frac{1}{n}} \overset{VoAL}{=} 1$$

$$\sum c_n \text{ D} \Rightarrow \sum b_n \text{ D} \Rightarrow \underline{\underline{\sum a_n \text{ D}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arccotg} 2n}{\sqrt[3]{n+4}}}_{a_n \geq 0} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

srovnáme s $b_n = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{\text{VOAL na dluh}}{=} \lim \frac{\operatorname{arccotg} 2n}{2\cdot\frac{1}{2n}} \cdot \lim \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+4}} = 2$$

$x_n = n,\ x_n \to \infty,\ x_n \neq \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

Heine

$$\lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{\operatorname{arccotg} 2x}{\frac{1}{2x}} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{x+4}} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \qquad \lim_{y\to\infty} 2\cdot\frac{\operatorname{arccotg} y}{\frac{1}{y}} = 2$$

$$\lim_{y\to 1} \sqrt[3]{y} = 1 \qquad (S)\ \sqrt[3]{y} \text{ spoj v } 1 \qquad (P)\ 2x \neq \infty \ \forall x \in \mathbb{R}$$

tedy $\sum a_n$ k $\iff \sum b_n$ k

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{1+1/3}} \ \text{k}$$

tedy $\sum a_n$ k (a to absolutně)