20. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Ačkoli ne u každého řešení je to napsáno, používáme hojně Heineho větu a Větu o limitě složené funkce. U obou těchto vět stejně jako u limitního srovnávacího kritéria pečlivě ověřujeme podmínky.

Teorie

Řada

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{\alpha} \ln^{\beta} n$$

konverguje právě tehdy, když $\alpha < -1$ a $\beta \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -1$ a $\beta < -1$.

Příklady

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Řešení:

Snadno se ověří, že všechny koeficienty $a_n = n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ jsou nezáporné. Ukážeme, že $a_n \not\to 0$ pro $n \to \infty$. Je totiž

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1 - \cos\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty,$$

kde pro výpočet limity posledního zlomku použijeme Heineho větu, substituci $x = \frac{1}{n}$ a limitu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Viz sken

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n}$$

Řešení: Viz sken

2

$$\sum \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{a_n \geq 0}$$

LSK s $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Heine $x_n = \frac{1}{n^2}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ K, tedy z LSK i $\sum a_n$ K

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}}_{a_n} \qquad a_n \geq 0$$

srovnáme s $\quad b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg} n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$$

neb Heine $x_n = n,\ x_n \neq \infty,\ x_n \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$\sum \frac{1}{n}$ D, tedy z LSK i $\underline{\underline{\sum a_n \ D}}$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$$

Řešení:

Položme $a_n = \sin n^{-1} \ln \frac{n+1}{n}$. Ukážeme, že a_n lze porovnat s $\frac{1}{n^2}$ a tudíž řada podle limitní verze srovnávacího kritéria konverguje. Podle Heineho věty a substituce $x = \frac{1}{n}$ totiž máme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

takže použitím obou limit dohromady dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

5.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right)$$

Řešení:

Protože

$$\left(k^{(k^2+1)^{-1}} - 1\right) = e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1$$

a výraz v exponentu konverguje pro $k \to \infty$ k nule (například podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla), dostáváme s přihlédnutím k Heineho větě, větě o limitě složené funkce a základní limity $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ pro $x \to 0$, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln k}{k^2+1}} - 1}{\frac{\ln k}{k^2+1}} = 1.$$

Podle limitní verze srovnávacího kritéria tedy vyšetřovaná řada konverguje, právě když konverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2+1}.$$

Ukážeme, že tato řada konverguje. K tomu nám poslouží dvojice odhadů

$$\frac{\ln k}{k^2+1} \leq \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{k^{3/2}},$$

přičemž první nerovnost platí pro každé k přirozené, o druhé ukážeme, že existuje přirozené N takové, že platí pro každé $k > N$. Jestliže tak učiníme, potom konvergence plyne ze srovnávacího kritéria a konvergence řady $\sum \frac{1}{k^p}$ pro $p >> 1$.

Tvrdíme tedy, že existuje přirozené N takové, že pro každé $k > N$ je

$$\frac{\ln k}{\sqrt{k}} \leq 1.$$

Podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla máme, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} = 0.$$

Volme tedy $\epsilon = 1$. Z definice limity vyplývá, že existuje N přirozené tak, že pro každé $k > N$ je $|\frac{\ln k}{\sqrt{k}} - 0| < \epsilon$, a tudíž, protože číslo nalevo je kladné, je $\frac{\ln k}{\sqrt{k}} < \epsilon = 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

6.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \cos\frac{1}{k}$$

Řešení:

Řada nekonverguje absolutně srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$, neboť limitní srovnávací kritérium dává

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1} \cos\frac{1}{k} = 1.$$

7.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Viz sken

8.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\frac{2k}{1+k^2},$$

Řešení: Viz další příklad.

9.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\frac{2kx}{x^2+k^2},$$

kde $x \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení:

7

$$\sum \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2}} = \sum a_n \qquad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(1) $$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

(2) $$\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}$$

(3) budeme srovnávat s $b_n = \frac{n^{-3/2}}{\frac{1}{n^{4/3}}} = n^{-3/2+\frac{4}{3}} = n^{-\frac{1}{6}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\overset{(*)}{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}}{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}} \cdot \underset{(**)}{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}$$

$$\cdot \overset{(****)}{\left(\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^4}\right)} \cdot \frac{1}{n^{-3/2}} \cdot \frac{1}{n^{4/3}}$$

$$\overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{1\cdot\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}\right)} \cdot \frac{\sqrt{(1+0)^2} + \sqrt[3]{1+0} + \sqrt[3]{1}}{1} = \frac{3}{2}$$

(*) Heine $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\quad x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

(**) $$\lim \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \qquad x_n = n, \quad x_n \neq \infty$$

Heine $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} \overset{(***)}{\overset{\text{VOAL}}{=}} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

VOLS!

(***) $f(y) = \sqrt{y}$ $\qquad \lim\limits_{y \to 1} \sqrt{y} = 1$

$g(x) = 1 + \frac{5}{x}$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 1 + 0 = 1$

spojitost f v 1

(****) analogicky

Závěr: $\sum n^{-1/6} = \sum \frac{1}{n^{1/6}}$ D

a tedy z LSK i $\underline{\underline{\sum a_n \text{ D}}}$

Pokud $x = 0$, řada má nulové koeficienty a konverguje. Pokud $x \neq 0$, použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arctan y}{y} = 1,$$

odkud vyplývá (substitucí $y = \frac{2kx}{x^2+k^2}$), že

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\arctan \frac{2kx}{x^2+k^2}}{\frac{2kx}{x^2+k^2}} = 1,$$

a proto řada $\sum_k \arctan \frac{2kx}{k^2+x^2}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_k \frac{2kx}{x^2+k^2}$. Jednoduchým srovnáním ale dostaneme, že od určitého členu počínaje, kdy je $k^2 \geq x^2$, platí

$$\frac{2kx}{x^2+k^2} \geq \frac{2kx}{2k^2} = \frac{x}{k},$$

přičemž řada napravo diverguje pro každé $x \neq 0$.

Závěr. Řada konverguje pro $x = 0$, jinak diverguje.

10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2+1}$$

Řešení:

S přihlédnutím k Heineho větě totiž jednoduchým rozšířením dostaneme

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n^2}{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{n}{n^2+1}}{\frac{n}{n^2+1}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Řada tudíž diverguje srovnáním s harmonickou řadou.

11.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{k^a} - 1\right),$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr. **Řešení:**

Pokud $a \geq 0$, pak $\lim \left(k^{k^a} - 1\right) = +\infty$, řada tedy diverguje, neboť není splněna základní podmínka konvergence $\lim a_k = 0$.

Pokud $a < 0$, pak platí

$$k^{k^a} - 1 = e^{k^a \ln k} - 1,$$

a tudíž (podle Heineho věty a věty o limitě složené funkce s přihlédnutím k faktu, že $\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = 0$ pro $a < 0$)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k^a} - 1}{k^a \ln k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{k^a \ln k} - 1}{k^a \ln k} = 1.$$

Stačí tedy podle limitního srovnávacího kritéria vyšetřit řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \ln k$$

pro $a < 0$. O této řadě víme, že pro $0 > a \geq -1$ je divergentní a pro $a < -1$ řada konverguje.

12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin 2^n$$

Řešení: Viz sken

13.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}$$

Řešení: Viz sken

14.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)\sqrt{\sin \frac{1}{n}}$$

Řešení: Viz sken

(12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4^n}\right) \sin(2^n)}_{a_n}$$

$$|a_n| \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n} \qquad \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\right)$$

srovnáme $b_n = \frac{\pi}{4^n}$ $\quad (b_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N})$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}}{\frac{\pi}{4^n}} = 1$$

Heine:
a známá lim $\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = 1$

$y_n := \frac{\pi}{4^n}$ $\qquad y_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

tedy $\sum \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$ konv. z LSK s $\sum \frac{\pi}{4^n}$, která konv.
(geom. Σ).

a tedy $\sum |a_n|$ konverguje (dokonce absolutně)
ze srov. krit. s řadou $\sum \operatorname{tg} \frac{\pi}{4^n}$.

(13)

$$\underbrace{\sum \frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}}_{a_n \geq 0}$$

LSK s $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \arccos \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \arccos \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}$$

Heine $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0$, $x_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

spojitost arccos v 0

$\sum \frac{1}{n}$ D, tedy i $\sum a_n$ D

$$\sum \arcsin\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \cdot \sqrt{\sin\frac{1}{n}} = \sum a_n$$

$a_n \geq 0$

$$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \frac{n^2+1-n^2+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

LSK S $\quad b_n = \frac{2}{\cancel{2n}\; n} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n^{3/2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \underset{(1)}{\frac{\arcsin\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}}{\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \cdot \frac{n}{2}$$

$$\cdot \underset{(2)}{\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}} \overset{\text{VOAL}}{=} 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(1) Heine $\quad x_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}} \quad x_n \to 0,\ x_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1$$

(2) Heine $\quad x_n = \frac{1}{n},\ x_n \to 0,\ x_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{\sin y}}{\sqrt{y}} = 1 \qquad \text{neboť} \quad f(z) = \sqrt{z} \quad \lim_{z\to 1} f(z) = 1$$

pon

$g(y) = \frac{\sin y}{y}$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$

VOLSF

spojitost $f(z)$

Závěr: $\quad \sum b_n$ K, tedy i $\underline{\underline{\sum a_n}}$ K