18. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$ (respektive $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$).

Příklady

1. (a)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{2n+a}-\sqrt[3]{2n+b})\sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}$$

$a,b\in\mathbb{R}$, $a,b>0$.

Řešení: Obvyklým způsobem rozšíříme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+a-2n-b}{(\sqrt[3]{(2n+a)^2}+\sqrt[3]{(2n+b)^2})\sqrt[3]{2n+a}\sqrt[3]{2n+b}}\sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(a-b)\frac{n^{2/3}}{n^{2/3}}\frac{\sqrt[3]{3+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2n}{n}+\frac{a}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2n}{n}+\frac{b}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{2+\frac{a}{n}}\sqrt[3]{2+\frac{b}{n}}}$$

$$\overset{VOAL}{=}(a-b)\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{(2+0)^2}+\sqrt[3]{(2+0)^2}+\sqrt[3]{2+0}\sqrt[3]{2+0}}$$

$$=(a-b)\frac{\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{4}}$$

(b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\pi(x-\frac{\pi}{4}))}{\cos 2x}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k,$$

$k\in\mathbb{Z}$.

Řešení: Použijeme větu o limitě složené funkce.

$$g(x)=x-\frac{\pi}{4}$$

,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}g(x)=0$$

$$f(y)=\frac{\sin\pi y}{\cos 2y+\frac{\pi}{2}}y^k,$$

a $\lim_{y\to 0}f(y)$ zbývá do počítat. Tedy

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{\cos(2y+\frac{\pi}{2})}y^k=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{\cos 2y\cos\frac{\pi}{2}-\sin 2y\sin\frac{\pi}{2}}y^k=\lim_{y\to 0}\frac{\sin\pi y}{\pi y}\frac{\sin 2y\sin}{2y}\frac{\pi}{-2}y^k$$

$$\overset{VOAL}{=}\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, & k=0\\ 0, & k>0\\ \text{neexistuje}, & k<0,\text{liché}\\ -\infty, & k<0,\text{sudé}\end{cases}$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln n})n^\alpha$$

$\alpha \in \mathbb{R}$
Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln n})n^\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}}n^\alpha =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\frac{n^\alpha}{n}\frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}}$$

Limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

konverguje k 1, neb

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(x+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$$

z věty o limitě složené funkce, a následně z Heineho.
Zbývá

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}}$$

Víme, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^a n}{n^b} = 0,$$

pro $a, b > 0$.
Odtud pro $\alpha - 1 > 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n^{\alpha-1}}+\frac{\sqrt{\ln n}}{n^{\alpha-1}}} = \infty$$

Pro $\alpha - 1 = 0$ máme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}} = 0$$

A konečně pro $\alpha - 1 < 0$ jest

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{\sqrt{\ln(n+1)}+\sqrt{\ln n}} = 0$$

(d)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(\sqrt{1+x^2}-x^\alpha)}{x^\alpha},$$

$\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení:
Rovnou rozeberme parametr.
Pro $\alpha < 0$ jde argument logaritmu k $-\infty$, a tedy logaritmus není definován.
Pro $\alpha = 0$ jest

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^\alpha} = 1$$

a z věty o limitě složené funkce (P2) máme

$$\lim_{x\to 0+} \log(\sqrt{1+x^2} - x^\alpha) = \text{"}\log(0)\text{"} = -\infty$$

dohromady

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{1+x^2} - x^\alpha)}{x^\alpha} = -\infty.$$

Zbývá $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{1+x^2} - x^\alpha)}{\sqrt{1+x^2} - x^\alpha - 1} \frac{\sqrt{1+x^2} - x^\alpha - 1}{x^\alpha} =$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{1+x^2} - x^\alpha)}{\sqrt{1+x^2} - x^\alpha - 1} \left(-1 + \frac{x^2}{x^\alpha[\sqrt{1+x^2}+1]} \right)$$

Máme z věty o lim. složené funkce (P2)

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(\sqrt{1+x^2} - x^\alpha)}{\sqrt{1+x^2} - x^\alpha - 1} = 1,$$

dále

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{[\sqrt{1+x^2}+1]} = \frac{1}{2}.$$

Výsledek bude záviset na hodnotě

$$\lim_{x\to 0+} x^{2-\alpha}.$$

Tedy, pro $\alpha > 0$ a zároveň $2 - \alpha > 0$ vyjde původní limita $-1 + 0$, pro $2 - \alpha = 0$ vyjde původní limita $-1 + \frac{1}{2}$ a pro $2 - \alpha < 0$ vyjde původní limita $-1 + \infty$.

2. Spočtěte derivace následujících funkcí

   (a)
   $$x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

   Řešení: Použijeme aritmetiku derivací (AD) a poučku: $x^{n\prime} = nx^{n-1}$, tedy

   $$(x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})' \overset{AD}{=} 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

   Nezapomeneme na podmínky: $x > 0$ (kvůli druhé odmocnině a jmenovateli).

(b)

$$\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Řešení: Totéž:

$$(\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}})' = (x^{2/3} - 2x^{-1/2})' \overset{AD}{=} \frac{2}{3}x^{2/3-1} - 2\cdot(-\frac{1}{2})x^{-1/2-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Podmínky: $x > 0$.

(c)

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Řešení: Budeme derivovat podíl a navíc složenou funkci. Tak tedy:

$$(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}})' \overset{AD}{=} \frac{x'\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - x^2}'}{\sqrt{a^2 - x^2}^2}$$

Nyní si zderivujeme složenou funkci, vnější funkce bude $f(x) = \sqrt{y}$, a vnitřní $g(x) = a^2 - x^2$, která je navíc spojitá na celém $\mathbb{R}$.

$$f(y)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$g(x)' = -2x$$

nezapomeneme, že a je konstanta a její dce je tudíž nulová, celkem

$$f(g(x))' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

Nyní se můžeme vrátit k původnímu výrazu:

$$\frac{x'\sqrt{a^2 - x^2} - x\sqrt{a^2 - x^2}'}{\sqrt{a^2 - x^2}^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - x\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}(-2x)}{\sqrt{a^2 - x^2}^2} = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$$

Podmínky: : $a^2 - x^2 > 0$ (pod odmocninou a ve jmenovateli), tedy $|a| > |x|$.

(d)

$$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Řešení: Složená funkce, vnější $f(x) = \ln y$ a vnitřní $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, spojitá až na $x = \pm 1$, takže:

$$f'(x) = \frac{1}{y}$$

a

$$g'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2},$$

tady jsme použili větu o derivování podílu (má podmínky, které jsme ovšem pořešili o dva řádky výše). Celekem:

$$\left(\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' \overset{SD}{=} \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

Podmínky: $x \neq \pm 1$, neb se vyskytuje ve jmenovateli s -1. Ale navíc máme ještě výraz uvnitř logaritmu, který musí být kladný. Tedy:

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0,$$

což dává podmínku: $|x| > 1$.

(e)

$$e^x(x^2-2x+2)$$

Řešení: Tady se seznámíme s e^x a otestujeme aritmetiku derivací. Tedy:

$$(e^x(x^2-2x+2))' \overset{AD}{=} e^x{}'(x^2-2x+2) + e^x(x^2-2x+2)' = \\ e^x(x^2-2x+2) + e^x(2x-2) = e^x \cdot x^2$$

Věta použita, neb e^x je spojité všude.

(f)

$$\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$$

Řešení: Dce podílu a zároveň součinu:

$$\left(\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}\right)' \overset{AD}{=} \frac{[x^{p-1}(1-x)^q + x^p q(1-x)^q(-x)](1+x) - x^p(1-x)^q \cdot 1}{(1+x)^2}$$

Podmínky: $x \neq -1$, pro případ, kdy $p < 0$ nebo $q < 0$ nutno ještě přidat podmínky: $x \neq 0$, $x \neq 1$, což nám zároveň zaručí spojitost pro podmínky věty.

(g)

$$x^x$$

Řešení: Tady nutno nejprve rozepsat a až poté derivovat:

$$x^x = e^{x\ln x}.$$

To je složená funkce, tedy: $f(x) = e^y$, $f'(x) = e^y$ a $g(x) = x\ln x$ a $g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ (derivace součinu, x je spojité na celém $\mathbb{R}$). Celkem máme:

$$(e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

Jelikož se x vyskytuje v logaritmu, tak $x > 0$. Jinak x i $\ln x$ jsou spojité a jejich součin je také spojitý, máme podmínky věty.

(h)

$$\ln(\ln^2(\ln^3 x))$$

Řešení: Úloha na víceré užití složené funkce, začneme od začátku: $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$, $g(x) = \ln^2(\ln^3 x)$, s její derivací počkáme. Takže máme:

$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))'$$

věnujme se zbylé derivaci, vnější funkce $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \ln(\ln^3 x)$. Celkem:

$$(\ln^2(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=} 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))'.$$

Dále, vnější $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$ a vnitřní $g(x) = \ln^3 x$, derivace se uvidí za chvíli. Získali jsme:

$$(\ln(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)'$$

Pokračujeme, vnější $f(x) = y^3$, $f'(x) = 3y^2$ a vnitřní $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, celkem

$$(\ln^3 x)' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$$

Takže celé dohromady to je:

$$(\ln(\ln^2(\ln^3 x)))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot (\ln^2(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot (\ln(\ln^3 x))' \stackrel{SD}{=}$$
$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot (\ln^3 x)' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot (\ln x)' \stackrel{SD}{=}$$
$$\frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln(\ln^3 x)\ln x}$$

Věty jsme používali bez předpokladů, je potřeba je doplnit. Polynomy i logaritmy jsou spojité na svém definičním oboru, takže ten musíme určit. Z logaritmů máme

$$\ln^2(\ln^3 x) > 0$$
$$|\ln^3 x| > 1$$
$$\ln x > 1$$
$$x > e.$$

(i)

$$\sin(\sin(\sin x))$$

Řešení: Toto je složená funkce, ovšem o poznání hezčí, než ta minulá. Takže už bez detailů

$$(\sin(\sin(\sin x)))' \overset{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' \overset{SD}{=}$$
$$\cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' \overset{SD}{=} \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\cos x)$$

Jelikož spojité je tady všechno, kam se kdo podívá (skládáme spojité funkce), tak podmínky věty splněny.

(j)

$$\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

Řešení: derivujeme podíl a ještě dvě složené funkce. Nejprve podíl (vše je spojité):

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \overset{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x (\sin x^2)'}{\sin x^2}$$

a nyní se podíváme na ty složené fce: první případ – $\sin^2 x$, vnější $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, sinus je spojitý, dohromady $(\sin^2 x)' \overset{SD}{=} 2 \sin x \cdot \cos x$.
druhý případ – $\sin x^2$, vnější $f(x) = \sin y$, $f'(x) = \cos y$, vnitřní $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$. Polynomy jsou spojité, máme tedy dohromady
$(\sin x^2)' \overset{SD}{=} \cos x^2 \cdot 2x$
Dosadíme zpět a máme:

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)' \overset{AD}{=} \frac{(\sin^2 x)' \sin x^2 - \sin^2 x (\sin x^2)'}{\sin x^2} \overset{SD}{=}$$
$$\frac{2 \sin x \cos x \sin x^2 - \sin^2 x \cos x^2 2x}{\sin x^2}$$

Podmínky: ve jmenovateli nesmí být nula, tedy $x^2 \neq k\pi$.

(k)

$$2^{\tan \frac{1}{x}}$$

Řešení: Nejprve přepíšeme

$$2^{\tan \frac{1}{x}} = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}$$

a uvědomíme si, že $\ln 2$ je úplně obyčejná konstanta ten zbytek je složená funkce. Máme vnější funkci $f(x) = e^y$, $f'(x) = e^y$, vnitřní $g(x) = \ln 2 \tan \frac{1}{x}$, spojitost vyřešíme za chvíli a máme:

$$\left(e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2}\right)' = e^{\tan \frac{1}{x} \cdot \ln 2} \cdot \left(\ln 2 \tan \frac{1}{x}\right)'$$

Násobením konstantou si neděláme hlavu. Opět složená funkce, vnější $f(x) = \tan y$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 y}$ vnitřní $g(x) = \frac{1}{x}$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ je spojitá mimo nulu, celkem $\left(\tan\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$ takže máme:

$$\left(e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2}\right)' = e^{\tan\frac{1}{x}\cdot\ln 2} \cdot \left(\tan\frac{1}{x}\right)' = 2^{\tan\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

Podmínky: $\frac{1}{x} \neq 0$ a kvůli tangens $\frac{1}{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Cestou jsme potřebovli spojitost $\tan\frac{1}{x}$, což jsme právě pořešili, neb jsme vyhodili nepěkné a zlé body, které nám spojitost kazí. Jinde je tangens (po určitých intervalech !) spojitý, což stačí, protože nám stačí spojitost na okolí.

(l)

$$\arcsin\,(\sin x)$$

Řešení: Nejprve si uvědomíme, že $\arcsin\,(\sin x) \neq x$, protože když jsme si povídali o arkussinus, tak jsme to popisovali jako: něco jako inverzi. Slova "něco jako", jsou tu dost důležitá. Kdyžtak si udělejte obrázek. Nyní k derivaci.

Složená funkce, vnější $f(x) = \arcsin\, y$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ a vnitřní $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, sinus je spojitý na celém $\mathbb{R}$, tedy

$$(\arcsin\,(\sin x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \mathrm{sgn}(\cos x).$$

Tady se vrátíme k úvaze ze začátku, kdyby se funkce rovnala identitě (x), tak by její derivace byla 1, ale ona není. závisí na znaménku kosinu.

Podmínky: arkussinus je definován jen na intervalu $[-1; 1]$, čili v krajních bodech má jen jednostranné derivace, a na jejich okolí není definován (jen z jedné strany), tedy nutno vyhodit body, kde $\sin x = \pm 1$, tedy $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ke $k \in \mathbb{Z}$. S touto podmínkou koresponduje i podmínka ze jmenovtele derivace $\sqrt{1 - \sin^2 x}$.

(m)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{2}}{x}$$

Řešení: Konstanta nas nezmate a dáme se do složené funkce: vnější $f(x) = \mathrm{arcctg}\, y$, $f'(x) = \frac{-1}{1+y^2}$ a vnitřní $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $g'(x) = \sqrt{2}\frac{-1}{x^2}$, g je spojitá mimo 0, takže:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{2}}{x}\right)' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \frac{2}{x^2}} \sqrt{2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2 + x^2}$$

Podmínky: už jsme pořešili, takže jen rekapitulace: $x \neq 0$.

(n)

$$x(\text{arcsin } x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\text{arcsin } x - 2x$$

Řešení: Aritmetika derivací:

$$(x(\text{arcsin } x)^2+2\sqrt{1-x^2}\text{arcsin } x-2x)' \stackrel{AD}{=} (x(\text{arcsin } x)^2)'+(2\sqrt{1-x^2}\text{arcsin } x)'-(2x)'$$

jednotlivé sčítance pořešíme zvlášť. Uděláme si přípravu pomocí složené funkce. Nejprve $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$, vnitřní $g(x) = \text{arcsin } x$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, g je spojitá na svém definičním oboru, dohromady: $((\text{arcsin } x)^2)' \stackrel{SD}{=} 2\text{arcsin } x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Dále, vnější $f(x) = \sqrt{y}$, $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}$ vnitřní $g(x) = 1-x^2$, je spojitá na celém $\mathbb{R}$, $g'(x) = -2x$, celkem $(\sqrt{1-x^2})' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)$.
Nyní jsme připraveni to celé dát dohromady. Takže

$$\begin{aligned}(x(\text{arcsin } x)^2)' + (2\sqrt{1-x^2}\text{arcsin } x)' - (2x)' &\stackrel{AD}{=}\\ x'(\text{arcsin } x)^2 + x((\text{arcsin } x)^2)' + 2(\sqrt{1-x^2})'\text{arcsin } x + 2\sqrt{1-x^2}(\text{arcsin } x)' - 2 &\stackrel{SD}{=}\\ 1 \cdot (\text{arcsin } x)^2 + 2x\text{arcsin } x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)\text{arcsin } x &\\ +2\sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 2 &=\\ \text{arcsin } x(\text{arcsin } x + \frac{2x-2x}{\sqrt{1-x^2}}) = \text{arcsin }^2 x.&\end{aligned}$$

Podmínky: vyplývají z definice arkussinu, $x \in [-1; 1]$, krajní body vyjmeme, jednak kvůli výskytu x ve jmenovateli zlomků a jednak proto, že tam arkussinus má jen jednostranné dce.

(o)

$$\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\text{ctgh}\frac{x}{2}\right)$$

Řešení: Opět si připravíme složené funkce předem. Nejprve vnější $f(x) = y^2$, $f'(x) = 2y$ a vnitřní $g(x) = \sinh x$, $g'(x) = \cosh x$, je spojité na célém $\mathbb{R}$, dohromady $(\sinh^2 x)' = 2\sinh x\cosh x$.
Další složenou fcí je vnější $f(x) = \ln y$, $f'(x) = \frac{1}{y}$ a vnitřní $g(x) = \text{ctgh}x$, $g'(x) = \frac{-1}{\sinh^2 x}$, g je definována a spojitá na $\mathbb{R}$ bez 0. Dohromady máme $(\ln(\text{ctgh}x))' \stackrel{SD}{=} \frac{1}{\text{ctgh}x} \cdot \frac{-1}{\sinh^2 x}$
Dále vnější $f(x) = \text{ctgh}y$, $f'(x) = \frac{-1}{\sinh^2 y}$ a vnitřní $g(x) = \frac{x}{2}$, $g'(x) = \frac{1}{2}$, polynom je spojitý na celém $\mathbb{R}$. Dohromady máme

$$\left(\text{ctgh}\frac{x}{2}\right)' = \frac{-1}{\sinh^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Hurá na celou funkci. Dle aritmetiky dcí a dce složené fce

$$\left(\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} - \ln\left(\operatorname{ctgh}\frac{x}{2}\right)\right)' =$$

$$\frac{\sinh^3 x - \cosh x \cdot 2\sinh x \cosh x}{\sinh^4 x} - \frac{1}{\operatorname{ctgh}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sinh^2 \frac{x}{2}}$$

Chybí nám podmínky, tedy: $\sinh x \neq 0$, tedy $x \neq 0$. Navíc kvůli logaritmu $\operatorname{ctgh}\frac{x}{2} > 0$, což jest $x > 0$.