18. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

pak tuto limitu nazýváme *derivací* funkce f v bodě a. Značíme

$$f'(a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Věta 2 (Aritmetika derivací)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a. Nechť existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

(a) Platí

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

(b) Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a, pak

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$

(c) Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2},$$

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))\, g'(x_0),$$

je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4 (O derivaci inverzní funkce)**.** Nechť f je spojitá a ryze monotónní v intervalu I a nechť a je vnitřním bodem I. Označme $b := f(a)$. Potom

(a) je-li $f'(a) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$, pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;

(b) je-li $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (respektive klesající), pak $\left(f^{-1}\right)'(b) = \infty$ (respektive $\left(f^{-1}\right)'(b) = -\infty$).

Věta 5. Nechť reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x\to a_+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a_+} f'(x).$$

Levá strana analogicky.

Příklady

1. (a)
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{2x+a}-\sqrt[3]{2x+b})\sqrt[3]{(x+1)(3x+2)}$$
$a,b\in\mathbb{R},\ a,b>0.$

(b)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(\pi(x-\frac{\pi}{4}))}{\cos 2x}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k,$$
$k\in\mathbb{Z}.$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln x})x^\alpha$$
$\alpha\in\mathbb{R}$

(d)
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\log(\sqrt{1+x^2}-x^\alpha)}{x^\alpha},$$
$\alpha\in\mathbb{R}.$

2. Spočtěte derivace následujících funkcí, určete definiční obory funkcí i jejich derivací

(a)
$$x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$$

(b)
$$\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$$

(c)
$$\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

(d)
$$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

(e)
$$e^x(x^2-2x+2)$$

(f)
$$\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$$

(g)
$$x^x$$

(h)
$$\ln(\ln^2(\ln^3 x))$$

(i)
$$\sin(\sin(\sin x))$$

(j)
$$\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

(k)
$$2^{\tan\frac{1}{x}}$$

(l)
$$\arcsin\ (\sin x)$$

(m)
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arccotg}\frac{\sqrt{2}}{x}$$

(n)
$$x(\arcsin\ x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin\ x-2x$$

(o)
$$\frac{\cosh\ x}{\sinh\ ^2x}-\ln\left(\operatorname{ctgh}\frac{x}{2}\right)$$

3. Vypočtěte derivace (i jednostranné) následujících funkcí

(a) $f(x)=|x|$

(b) $f(x)=x\cdot|x|$

(c)
$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x\in(-\infty,1)\\ (1-x)(2-x), & [1,2]\\ -(2-x), & (2,\infty)\end{cases}$$

(d) $f(x)=|\ln|x||$