17. cvičení

http://karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Následující limity lze počítat přímo použitím exponenciálního triku, totiž postupem využívajícího větu o limitě složené funkce (varianta s vnější spojitou funkcí)

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} e^{g\ln f} = e^{\lim_{x\to a}(g\ln f)}.$$

Často se pro přehlednout píše e^y jako $\exp[y]$. Tedy předchozí řádek by vypadal

$$\lim_{x\to a} f^g = \lim_{x\to a} \exp[g\ln f] = \exp\left[\lim_{x\to a}(g\ln f)\right].$$

V těchto příkladech totiž bude limita součinu $g\ln f$ jednoduše určitelná. K tomu se hodí poznamenat, že platí podle věty o limitě složené funkce (varianta: vnější funkce spojitá)

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = +\infty, \qquad \text{kdykoliv } f(x) \xrightarrow{x\to a} +\infty,$$

$$\lim_{x\to a} e^{f(x)} = 0, \qquad \text{kdykoliv } f(x) \xrightarrow{x\to a} -\infty.$$

Ve smyslu těchto rovností je zapotřebí chápat obvyklý zápis, kdy píšeme $e^{+\infty} = +\infty$ a $e^{-\infty} = 0$.

Limity typu 1^∞

Ukážeme si, jak se tato metoda používá na limity typu 1^∞. To znamená, že počítáme limitu $\lim f(x)^{g(x)}$, kde $\lim f(x) = 1$ a $\lim g(x) = \infty$. Výpočet se pak obvykle drží následujícího schématu:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} (1 + (f(x) - 1))^{g(x)} =$$

V prvním kroku jsme přičetli a odečetli „chytrou jedničku". To proto, že výraz $f(x) - 1 \to 0$. Proč jsme to učinili, bude jasné z příštího kroku.

$$= \lim_{x\to a} \left[(1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)} =$$

V tomto kroku jsme rozšířili exponent. Účelem je, že uvnitř hranatých závorek jsme vyrobili výraz, který se při substituci $y = f(x) - 1 \to 0$ rovná $(1 + y)^{1/y}$, kterýžto konverguje k Eulerovu číslu. Nyní použijeme exponenciální trik,

$$= \lim_{x\to a} \exp\left[\ln (1 + (f(x) - 1))^{\frac{1}{f(x)-1}} \cdot (g(x)(f(x) - 1))\right] =$$

použitím věty o limitě složené funkce dostaneme limitu dovnitř exponenciály (a posléze logaritmu) a pomocí věty o součinu limit dále obdržíme

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{x\to a}(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(g(x)(f(x)-1)\right)\right] =$$

Substitucí $y = f(x) - 1$ na první limitu ale dostaneme, že

$$= \exp\left[\ln\left(\lim_{y\to 0}(1+y))^{\frac{1}{y}}\right)\cdot\lim_{x\to a}\left(g(x)(f(x)-1)\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\ln(e)\cdot\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\right].$$

Tímto způsobem se převede zkoumání limity $\lim f^g$ na zkoumání limity součinu $\lim g(f-1)$, což bývá často mnohem jednodušší.

Dodejme, že tento převod se dá odvodit i jednodušseji s použitím limity $\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1} = 1$, neboť (zkráceně psáno) platí

$$\lim f^g = \exp[\lim g\ln f] = \exp[\lim\left(\frac{\ln f}{f-1}\right)\cdot\lim g(f-1)] = \exp[\lim g(f-1)].$$

Příklady

1. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^x$$

2. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

(b)
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

(c)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

(d)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$$

(e)
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$$

(f)
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}+}\left[\mathrm{tg}\,\left(\frac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\mathrm{tg}\,2x}$$

(g)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

(h)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$$

3. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}\,^2 x}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}\,x)^{\frac{1}{\sin x}} =$$

(d)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}\,x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$$

(e)
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$$

(f)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}\,x}$$

4. Nechť funkce f má v bodě x_0 limitu $A\in\mathbb{R}$ ($\lim_{x\to x_0} f(x)=A$). Ukažte, že pak
$$\lim_{x\to x_0}|f(x)|=|A|.$$