16. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

   (b)
$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

   (c)
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2-e^{2x}}}{\arccos x}$$

   (d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen z logaritmu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$$

Řešení:

Postupujeme vytknutím.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x^{10}+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

Je načase využít další hezké vlastnosti logaritmu, konkrétně jeho chování vůči mocninám.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\ln x+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})} =$$

A konečně poslední vytknutí

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})/\ln x}{10+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})/\ln x} = \frac{2+0}{10+0} = \frac{1}{5}.$$

Jen pro pohodlí řekněme, že výpočet limity využívá věty o algebře limit a výpočet (s přihlédnutím ke spojitosti logaritmu)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{1} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = \ln(1-0+0)\cdot 0 = 0.$$

To, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ netřeba zdůvodňovat.

(e) Zbavme se odmocniny

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$$

Řešení:
Sledujte výpočet.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2}=$$

Po použití věty o limitě podílu (limita jmenovatele je rovna jedné) pokračujeme rozšířením odmocniny.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}$$

Řešení:
substituce $y=\ln x$ (věta o limitě složené funkce, varianta s ryze monotónní (nekonstantní) funkcí uvnitř).

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x+1}{\ln x}\right)^{\ln x}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e.$$

(g) Vytkněte dominantní člen z logaritmu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3-\text{arctan } x)}{\ln(x^2+\text{arctan } x)}$$

Řešení:
Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^3-\text{arctan } x)}{\ln(x^2+\text{arctan } x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^3\left(1-\frac{\text{arctan } x}{x^3}\right)}{\ln x^2\left(1+\frac{\text{arctan } x}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x+\ln\left(1-\frac{\text{arctan } x}{x^3}\right)}{2\ln x+\ln\left(1+\frac{\text{arctan } x}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{\ln\left(1-\frac{\text{arctan } x}{x^3}\right)}{\ln x}}{2+\frac{\ln\left(1+\frac{\text{arctan } x}{x^2}\right)}{\ln x}}\overset{VOAL}{=}\frac{3+0}{2+0}$$

Použili jsme limity

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x}{x^2} = 0,$$

neb $\arctan x$ je omezená a $1/x$ mizející funkce.
Dále jsme použili spojitosti logaritmu (v 1) a opět součin omezené a mizející.

(h)

$$\lim_{x\to\infty} x\mathrm{arccotg}\ x = 1$$

(i)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2+4) - \ln x^2}}{\mathrm{arccotg}\ x}$$

(j) Užijte vzorce pro logaritmus

$$\lim_{x\to+\infty} x\,[\ln(x+1) - \ln x]$$

(k)

$$\lim_{x\to+\infty} x\,[\ln(x+1) - \ln x]$$

Řešení: Užijeme pravidla, že rozdíl logaritmů je logaritmus podílu a spojitosti logaritmu.

$$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x\to+\infty} x \ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$\ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln[e] = 1.$$

2. (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} x^{5/2}\arcsin\left(\sqrt{x^5+1} - \sqrt{x^5-1}\right)$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

(d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$$

Řešení:

Vytknutím, jako obvykle. Pak použijte větu o algebře limit a spojitost logaritmu.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln e^{3x}+\ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{\ln e^{2x}+\ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+\ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)}{2x+\ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\ln(\frac{2}{e^{3x}}+1)/x}{2+\ln(\frac{3}{e^{2x}}+1)/x}=\frac{3+0}{2+0}=\frac{3}{2}.$$

(e)

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}$$

Řešení:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x\sin x}/x^2}{(e^{x^2}-1)/x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x\sin x}}{x^2}=$$

Protože $x\sin x$ je kladný výraz na okolí nuly, též tak x^2, můžeme doplnit absolutní hodnoty.

$$=\lim_{x\to0}\frac{|x\sin x|^{1/2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{3/2}}=\lim_{x\to0}\frac{|\sin x|^{1/2}}{|x|^{1/2}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=1\cdot+\infty=+\infty$$

(f) Užijte substituci $y=x-a$

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a},\qquad \text{kde } a>0$$

Řešení:

Užijeme substituci $y=x-a$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim_{y\to0}\frac{\ln\frac{y+a}{a}}{y}=$$

$$\lim_{y\to0}\ln\left(1+\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{y}}=\ln\left[\lim_{y\to0}\left(1+\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{y}}\right]=\ln[e^{1/a}]=\frac{1}{a}.$$

(g) Užijte $a^x=e^{x\ln a}$,

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x},$$

kde $a>0$.

Řešení:

Substituujme $y=x+1$ a posléze $y=e^z$. Pak máme

$$\lim_{y\to1}\frac{\ln y}{y-1}=1\implies\lim_{z\to0}\frac{z}{e^z-1}=1\implies\lim_{z\to0}\frac{e^z-1}{z}=1.$$

Tím jsme spočítali příklad pro speciální případ, kdy a je rovno Eulerovu číslu e.

Nyní spočteme limitu pro obecné $a > 0$. V závěru substituujeme $y = x \ln a$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a} - 1}{x \ln a} \cdot \ln a = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a = \ln a.$$

(h)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

(i)

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

Řešení:
Zde výhodně využijeme znalosti limity $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$. Stačí upravovat

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-2+3}{x^2-2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{x^2-2} \cdot \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{2} = e^3 \cdot 1^2 = e^3.$$

(j) Převeďte na základní limitu

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

(k)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Řešení: Protože $3^x \to 0$, pokud $x \to -\infty$, vede k cíli nenápadné rozšíření.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{3^x}}{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{2^x}} \cdot \lim_{x\to -\infty} \frac{3^x}{2^x} =$$

Substituce $y = 3^x$ a $z = 2^x$ dává ihned v kombinaci s faktem, že $\frac{3}{2} > 1$, a tedy $(\frac{3}{2})^x$ klesá v minus nekonečnu k nule

$$= \frac{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y}}{\lim\limits_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z}} \cdot \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$$

(l) Vytkněte...

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

Řešení:

V čitateli vytkněte $\sqrt{x}$, dole $\sqrt[3]{x}$ (oba členy s nejvyšší mocninou u x).

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}+\ln(x^{-1/2}+1+x^{-1/6})}{\ln\sqrt[3]{x}+\ln(x^{-1/3}+1+x^{-1/12})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln x+\ln(x^{-1/2}+1+x^{-1/6})}{\frac{1}{3}\ln x+\ln(x^{-1/3}+1+x^{-1/12})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}+\ln(x^{-1/2}+1+x^{-1/6})/\ln x}{\frac{1}{3}+\ln(x^{-1/3}+1+x^{-1/12})/\ln x} = \frac{\frac{1}{2}+0}{\frac{1}{3}+0} = \frac{3}{2}.$$

(m) Vytkneme dominantní člen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Řešení:

V čitateli i jmenovateli jsou dominantními členy exponenciály. Vytkneme je tedy. Sledujte, co se bude dít.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 3^x(3^{-x}+1)}{\ln 2^x(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 3^x+\ln(3^{-x}+1)}{\ln 2^x+\ln(2^{-x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln 3+\ln(3^{-x}+1)}{x\ln 2+\ln(2^{-x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 3+\ln(3^{-x}+1)/x}{\ln 2+\ln(2^{-x}+1)/x} =$$

Věta o limitě podílu a o limitě součtu dává (s přihlédnutím k fatku, že $0/\infty = 0$, hranaté závorky naznačují neoficiální část výpočtu; pokud ale máte zavedenu algebru nekonečen, je vše v pořádku)

$$\left\langle\left\langle = \frac{\ln 3+\ln(0+1)/(+\infty)}{2+\ln(0+1)/(+\infty)}\right\rangle\right\rangle = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

(n) Půjčte si a^a, roztrhněte, vytkněte a^a a a^{a-1}.

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a},$$

kde $a>0$

Řešení:

Postupujeme trikem vhodného rozšíření za pomoci limity z předchozího příkladu.

$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x-a^a+a^a-x^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{a^x-a^a}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{x^a-a^a}{x-a} =$$

Nyní jde vlastně o počítání derivací funkcí a^x a x^a v bodě a.

$$= \lim_{x\to a} a^a \frac{a^{x-a}-1}{x-a} - \lim_{x\to a} a^{a-1} \frac{(\frac{x}{a})^a - 1}{\frac{x}{a}-1} =$$

V první limitě substituujeme $y = x - a$, ve druhé $z = x/a$.

$$= \lim_{y\to 0} a^a \frac{a^y - 1}{y} - \lim_{z\to 1} a^{a-1} \frac{z^a - 1}{z-1} = a^a \ln a - \lim_{z\to 1} a^{a-1} \frac{e^{a\ln z} - 1}{z-1} =$$

Nyní chytře rozšíříme a užijeme substituci $t = z - 1$ na poslední zlomek. Viz též příklad XXI.B.1.

$$= a^a \ln a - \lim_{z\to 1} a^{a-1} \frac{e^{a\ln z} - 1}{a\ln z} \cdot \lim_{z\to 1} \frac{a\ln z}{z-1} =$$

$$= a^a \ln a - a^{a-1}\cdot 1 \cdot a \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\ln(t+1)}{t} = a^a \ln a - a^a \cdot 1 = a^a(\ln a - 1).$$

(o) Půjčte si x^a a postupujte obdobně

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a},$$

kde $a > 0$

Řešení:

Postupujeme trikem vhodného rozšíření.

$$\lim_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^x - x^a + x^a - a^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^x - x^a}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{x^a - a^a}{x-a} =$$

Druhou limitu už známe a víme, že je rovna a^a (viz výpočet v minulém příkladu). Zbývá spočítat první limitu.

$$= \lim_{x\to a} \frac{x^x - x^a}{x-a} + a^a = \lim_{x\to a} \left(x^a \frac{x^{x-a} - 1}{x-a} \right) + a^a = \lim_{x\to a} \left(x^a \frac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{x-a} \right) + a^a =$$

$$= \lim_{x\to a} \left(x^a \ln x \frac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{(x-a)\ln x} \right) + a^a = \lim_{x\to a} (x^a \ln x) \cdot \lim_{x\to a} \frac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{(x-a)\ln x} + a^a =$$

Substituce $y = (x-a)\ln x$ na druhou limitu.

$$= a^a \ln a \cdot \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} + a^a = a^a \ln a + a^a = a^a(\ln a + 1).$$

(p)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x$$

Řešení:
Pokud $c>0$, tak substituujeme $y=x/c$ a dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{yc}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^c=e^c,$$

neboť mocninná funkce x^c je spojitá. Pokud $c=0$, vše je triviální. Pokud $c<0$, potom použijeme substituce $y=-x/c$ a dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-yc}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-yc}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{yc}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{yc}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{(y-1)c+c}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\right]^c\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^c=e^c\cdot 1^c=e^c.$$

Limita první plyne třeba substitucí $z=y-1$.

(q)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

Řešení:
Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x=e^{2a}.$$