# 16. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Teorie

$\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0. \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad \lim_{x\to\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctan = \frac{-\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad \lim_{x\to 1-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \qquad \lim_{x\to\infty} x \operatorname{arccotg} x = 1$$

## Hinty

$$a^b = e^{b\ln a} \qquad \ln a + \ln b = \ln(ab) \qquad \ln a - \ln b = \ln \tfrac{a}{b}$$

## Příklady

1. (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$$
(b)
$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 - \frac{3}{x}\right)$$
(c)
$$\lim_{x\to 1-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$$
(d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen z logaritmu
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$$
(e) Zbavme se odmocniny
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$
(f)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x + 1}{\ln x}\right)^{\ln x}$$
(g) Vytkněte dominantní člen z logaritmu
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3 - \arctan x)}{\ln(x^2 + \arctan x)}$$
(h)
$$\lim_{x\to\infty} x \operatorname{arccotg} x = 1$$

(i)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\ln(x^2+4)-\ln x^2}}{\operatorname{arccotg} x}$$

2. (a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} x^{5/2} \arcsin\left(\sqrt{x^5+1}-\sqrt{x^5-1}\right)$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty} x \ln\left(1-\frac{2}{x^2}\right)$$

(d) Vytkněte nejrychleji rostoucí člen
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x\sin x}}{e^{x^2}-1}$$

(f) Užijte substituci $y = x - a$
$$\lim_{x\to a} \frac{\ln x - \ln a}{x-a}, \qquad \text{kde } a > 0$$

(g) Užijte $a^x = e^{x\ln a}$,
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x},$$
kde $a > 0$.

(h)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$$

(j) Užijte vzorce pro logaritmus
$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$$

(i) Převeďte na základní limitu
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

(j) Vytkněte...
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$$

(k) Vytkneme dominantní člen
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

(l) Půjčte si $a^a$, roztrhněte, vytkněte $a^a$ a $a^{a-1}$.
$$\lim_{x\to a} \frac{a^x-x^a}{x-a},$$
kde $a > 0$

(m) Půjčte si $x^a$ a postupujte obdobně
$$\lim_{x\to a} \frac{x^x-a^a}{x-a},$$
kde $a > 0$

(n)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{c}{x}\right)^x$$

(o)
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$$

3. Rozhodněte, zda platí:

ANO-NE Má-li funkce limitu, tak má i limitu zleva a zprava.
ANO-NE Má-li funkce limitu zleva a zprava, má i limitu.
ANO-NE Je-li funkce omezená, pak má limitu v nekonečnu.
ANO-NE Je-li funkce lichá, pak má limitu v 0.