17. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$$

Řešení:

Užijeme substituci $y = 5x$. Když $x \to 0$, potom také $y = 5x \to 0$, a proto platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 5 \cdot 1 = 5.$$

2.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Řešení:

Příklad je velmi jednoduchý, jenom je třeba nepodlehnout automatismu! Protože $-1 \leq \sin x \leq 1$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, platí:

$$0 \xleftarrow{x\to\infty} -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to\infty} 0,$$

a tedy musí být podle věty o srovnání

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\, x}{x}$$

Řešení:

Počítejme.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

4.

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg}\, 3x$$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x\to 0} x \operatorname{cotg}\, 3x = \lim_{x\to 0} x \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{\cos 3x}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\,x-\sin x}{\sin^3 x}$$

Řešení:

Počítejme.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\,x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\sin^3 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x\cos x}=$$

Nyní vhodně rozšíříme a použijeme příkladu VI.4.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{\frac{1}{2}}{1^2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}.$$

6.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$$

Řešení:

Zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin x}{x}}\cdot 5-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}}\cdot 3=\frac{1}{1}\cdot 5-\frac{1}{1}\cdot 3=2.$$

7.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$$

Řešení: Přičteme a odečteme „chytrou jedničku“, zlomek roztrhneme na dva a vhodně rozšíříme. Pak použijeme příkladu VI.4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}-\frac{1-\cos x-(1-\cos 3x)}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(3x)^2}\cdot 9=-\frac{1}{2}+\frac{9}{2}=4.$$

8.
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\,2x\operatorname{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

Řešení: Nejprve si výraz trochu zjednodušme.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\,2x\cdot\operatorname{tg}\,\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=$$

S přihlédnutím k faktu, že $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ a $\cos 0 = 1$ dostaneme

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}}{\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x} =$$

Nyní pro názornost použijeme substituci $y = \frac{\pi}{4} - x$.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos 2(\frac{\pi}{4} - y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos(\frac{\pi}{2} - 2y)} =$$

Dále užijeme součtový vzorec $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ na jmenovatel.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\cos\frac{\pi}{2}\cos 2y + \sin\frac{\pi}{2}\sin 2y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{\sin 2y} =$$

A nyní přijde chytré rozšíření.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin 2y}{2y}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

9.

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$$

Řešení: Počítejme.

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \lim_{x\to a} \cos\frac{x+a}{2} = 1\cdot\cos\frac{a+a}{2} = \cos a.$$

10.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$$

Řešení:

Trik je v použití metod na rozklad kvadratického trojčlenu (třeba počítáním kořenů kvadratické rovnice nebo uhodnutím). Zde platí

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = -3.$$

11.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

Řešení:

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg} x-1-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{4}.$$

12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$$

Řešení:

Počítejme. Nejprve se vypořádáme s odmocninami.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}\cdot$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}}=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}=2\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$$

Řešení:

Počítejme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}\frac{x^2}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos x^2}{x^4}}=2\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

13.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$$

, kde m, n jsou přirozená čísla.

Řešení:

Substituujeme $y=x-\pi$. Jestliže $x\to\pi$, potom $y\to 0$, a tedy platí.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin m(y+\pi)}{\sin n(y+\pi)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(my+m\pi)}{\sin(ny+n\pi)}=$$

Nyní použijeme součtový vzorec $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ a přihlédneme k faktu, že $\cos m\pi = (-1)^m$ a $\sin m\pi = 0$ pro libovolné m přirozené.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin my \cos m\pi + \sin m\pi \cos my}{\sin ny \cos n\pi + \sin n\pi \cos ny} = \lim_{y\to 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} =$$

A nyní ještě vhodně rozšíříme, použijeme větu o aritmetice limit a vše bude jasné.

$$= \lim_{y\to 0} \frac{(-1)^m \frac{\sin my}{my}}{(-1)^n \frac{\sin ny}{ny}} \cdot \frac{m}{n} = (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$