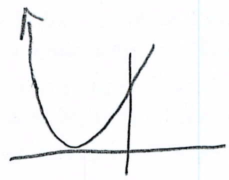
(1)(a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x+2}{-x+1} = \dfrac{3 \cdot 3 + 2}{-3+1} = \underline{\underline{\dfrac{-11}{2}}}$

ze spojitosti

(b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = 1$

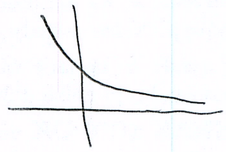
ze spojitosti

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+3)^2 = \infty$



lim. polynomu

(d) $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$



exponenciela

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{-8-x} = 0$

(f) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{6}{x-5} \quad \nexists$

ale $\lim\limits_{x \to 5+} \dfrac{6}{x-5} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 5-} \dfrac{6}{x-5} = -\infty$

(g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{\ln x + 1} \text{ "}=\text{" } \dfrac{1}{\infty} = 0$

(h) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+5)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x+5 = \underline{\underline{6}}$

(i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+4x-5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+5}{x-1} \quad \nexists$

ale $\lim\limits_{x \to 1+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1-} = -\infty$

(j) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+3x+5+\frac{1}{x}}{-2x^2+4x-3} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2} \cdot \dfrac{3+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{-2+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}$

$\overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{3+0+0+0}{-2+0-0} = \underline{\underline{-\dfrac{3}{2}}}$

(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^3+7x^2+5+x^{10}+\frac{1}{x}}{2x^{10}+4x-9} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{10}}{x^{10}} \cdot \dfrac{1+\frac{8}{x^7}+\frac{7}{x^8}+\frac{5}{x^{10}}+\frac{1}{x^{11}}}{2+\frac{4}{x^9}-\frac{9}{x^{10}}} \overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{1+0+0+0+0}{2+0-0} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

(l) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+3x+5+\frac{1}{x}}{8x^3+4x^2-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^3} \cdot \dfrac{1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{8+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^3}}$

$\overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{1+0+0+0}{8+0-0} = \underline{\underline{\dfrac{1}{8}}}$

(2) (a) $\lim\limits_{x\to-1} e^{\frac{x+2}{x+3}} = e^{\frac{-1+2}{-1+3}} = e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{e}}}$

(b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \quad \nexists$

ale $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{(x-4)^2} = 0$

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \ln(x-3)$! není def na okolí, nemá smysl

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad \nexists$

ale $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$

(f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+4}{x-1}$

$\nexists$ ale $\lim\limits_{x \to 1+} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1-} = -\infty$

(g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+4} = 0$ spojitost

(h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3-2x+x}{2x^3+x^2-2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x^2-2+1)}{x(2x^2+x-2)} \overset{\text{VOAL}}{=} \dfrac{-1}{-2} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$

3. cvičení

http://www.web.natur.cuni.cz/~kunck6am/

1. (a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení:

Funkce je v bodě 0 spojitá, platí tedy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0-1}{0-0-1} = 1.$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení:

Počítáme-li limitu v nevlastním bodě, stačí vytknout „nejvíce rostoucí“ (dominantní) člen, tedy

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0}{2-0-0} = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Řešení:

Platí, že $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ a (buď výpočtem kořenů nebo uhodnutím s pomocí faktu, že 1 je kořen, lze odvodit, že) $2x^2-x-1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Platí tedy

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

Řešení:

Snadno se ověří, že jednička je kořen. Použijeme dělení členem $(x-1)$ nahoře i dole. Když vydělíte poprvé, vyjde, že jednička je opět kořenem v čitateli i jmenovateli a je potřeba dělit znovu. Dostane se tak

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1+2}{1+2+3} = \frac{1}{2}.$$

(e)

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$$

Řešení:

Rozložte polynomy na součin a pak teprve umocněte.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{[(x-2)^2]^{10}(x+4)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}} = \frac{3^{10}}{2^{10}}.$$

(f)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde m, n jsou přirozená čísla.

Řešení:

Sledujte výpočet. Uvědomte si, že proměnnou je x, nikoliv m, n, která jsou danými parametry. Opět by šlo použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1} =$$

Jiné řešení skýtá fakt, že

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} m x^{m-1} = m,$$

což víme ze vzorců pro derivaci funkce x^m, vlastně počítáme derivaci této funkce v bodě 1. Známe-li tento vzorec, lze tento postup použít i pro m, n reálná, různá od nuly.

(g)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 1.$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x-1}}$$

Řešení:

Vytknutím dostaneme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{1+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(i)

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$$

Řešení:

Rozšířením dostaneme

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1+2x-9}{x-4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{x-4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=2\cdot\frac{2+2}{3+3}=$$

(j)

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

kde $a>0$

Řešení:

Úpravou dostaneme

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\left[\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}+1\right]=\frac{1}{\sqrt{2a}}+\frac{1}{\sqrt{2a}}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}},$$

neboť

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{0}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}=0.$$