13. cvičení

Příklady

1. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{3}-1)$$

Řešení: Otestujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}-\lim_{n\to\infty}1=1-1=0.$$

Je vidět, že posloupnost je neklesající, tedy z Leibnize řada konverguje,

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\ln k}$$

Řešení: Řada konverguje podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\ln k}\xrightarrow{k\to\infty}0$. Posloupnost $\frac{1}{\ln k}$ je zjevně nerostoucí.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}$$

Řešení: Řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+4}{3n^2+2}=\frac{2}{3}\neq 0,$$

tedy řada diverguje.

2. (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k+1}\cos 2k\pi$$

Řešení: Řada diverguje, neb nesplňuje nutnou podmínku konvergence:

$$\lim(-1)^k\frac{k}{k+1}\cos k\pi=(-1)^k\frac{k}{k+1}(-1)^k=1.$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k^2}{k^2+1}$$

Řešení: Podle Leibnizova kritéria konverguje řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$. Následně podle Abela konverguje také $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k^2}{k^2+1}$, neboť posloupnost $\frac{k^2}{k^2+1}$ je monotónní.

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

Řešení: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+10}{3k+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin k}{k^2+1}$$

Řešení: Označme a_k obecný k-tý člen řady. Nejprve vyloučíme absolutní konvergenci porovnáním s řadou $\sum_k |\sin k|/k$. To je divergentní řada podle faktu uvedeného na začátku oddílu o konvergenci obecných řad. Přitom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|\sin k|/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Tudíž vyšetřovaná řada nemůže konvergovat absolutně.
Upravíme nyní člen řady na tvar

$$(-1)^k \frac{k \sin k}{k^2+1} = (-1)^k \frac{\sin k}{k} \cdot \frac{k^2}{k^2+1}.$$

Dokážeme-li nyní konvergenci řady $\sum_k (-1)^k \frac{\sin k}{k}$, pak, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\frac{k^2}{k^2+1}\}$ je evidentně omezená (má limitu) a monotónní, z Abelova kritéria bude vyplývat také neabsolutní konvergence vyšetřované řady.
Nyní použijeme **triku** rozdělení řady na dvě, na řadu sudých a lichých členů.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\ldots} (-1)^k \frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\ldots} (-1)^k \frac{\sin k}{k}$$

což po úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\ldots} -\frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\ldots} \frac{\sin k}{k}$$

Z následující poznámky plyne, že pokud dokážeme konvergenci řad na pravé straně, pak konverguje také řada na straně levé a rovnost s otazníkem platí.

Avšak konvergence obou řad na pravé straně plyne z Dirichletova kritéria. Protože $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně, stačí ověřit stejnou omezenost částečných součtů řad $\sum_k \sin k$ sčítaných přes sudé a liché členy.

Řada $\sum_k \sin kx$ má totiž omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položením $x = 2$ tedy zjišťujeme, že řada $\sum_k \sin(2k) = \sum_{k=2,4,\dots} \sin k$ má omezené částečné součty. A protože

$$\left|\sum_{k=1,3,5,\dots}^{N} \sin k\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} \sin k - \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{N} \sin k\right| + \left|\sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k\right|$$

a obě řady napravo mají stejně omezené částečné součty, plyne odtud stejná omezenost částečných součtů i pro řadu lichých členů.

Tím je neabsolutní konvergence vyšetřované řady dokázána.

(e) Užijte faktu $2\sin^2 = 1 - \cos 2k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$$

Řešení: Pomocí faktu výše píšeme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2k}{k}.$$

První řada diverguje, druhá konverguje z Dirichleta (a faktů). Tedy součet vpravo je dobře definován a řada diverguje.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin^2 k}{k^2 + 1}$$

Řešení: Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. K tomu stačí dokázat divergenci řady $\sum_k \frac{\sin^2 k}{k}$ a použít limitní srovnávací kritérium. Nyní platí, že $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ a tudíž

$$\sum_k \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_k \frac{1 - \cos 2k}{k} = \sum_k \frac{1}{k} - \sum \frac{\cos 2k}{k},$$

přičemž poslední řada napravo $\sum_k \frac{\cos 2k}{k}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně a $\sum_k \cos kx$ má omezené částečné součty pro každé

$x \in \mathbb{R}$, tedy speciálně také pro $x = 2$. Tudíž součet řady $\sum_k \frac{\cos 2k}{k} = S$ je reálné číslo, a protože harmonická řada diverguje do $+\infty$, platí

$$\sum_k \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_k \frac{1-\cos 2k}{k} = \sum_k \frac{1}{k} - \sum \frac{\cos 2k}{k} = +\infty - S = +\infty.$$

Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně. Za tímto účelem řadu roztrhněme na dvě:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin^2 k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k(1-\cos 2k)/2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2}\frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\cos 2k}{k^2+1}.$$

První z řad napravo konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro druhou lze použít analogický postup jako v minulém příkladě.

(g)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2k}{\ln k}$$

Řešení:

Absolutně řada nekonverguje neb

$$\frac{|\cos 2k|}{\ln k} \geq \frac{|\cos 2k|}{n},$$

kteréžto diverguje (fakta o goniometrických řadách).

Neabsolutně řada konverguje z Dirichleta, neb $\cos 2k$ má omezené částečné součty a $1/\ln k \to 0$.

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos^2 k}{\ln k}$$

Řešení:

Řada nekonverguje absolutně, neboť

$$\sum_k \frac{\cos^2 k}{\ln k} = \sum_k \frac{1+\cos 2k}{2\ln k} = \underbrace{\sum_k \frac{1}{2\ln k}}_{=+\infty} + \underbrace{\sum_k \frac{\cos 2k}{2\ln k}}_{\text{konverg. řada}} = +\infty,$$

neboť druhá z řad je konvergentní podle Dirichletova kritéria díky omezenosti částečných součtů řady $\sum_k \cos 2k$ (plyne z prvního faktu o „goniometrických“ řadách v úvodu oddílu o konvergenci obecných řad).

Řada konverguje neabsolutně, neboť

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos^2 k}{\ln k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1+\cos 2k}{2\ln k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2\ln k}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos 2k}{2\ln k},$$

přičemž první z řad napravo konverguje podle Leibnizova kritéria a pro druhou lze užít analogický postup jako v příkladu (**??**) – rozdělení na sudé a liché členy (tím zmizí $(-1)^k$) a použití Dirichletova kritéria.

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{A^k+1}\sin k,$$

kde $A>0$.

Řešení:

Pokud $A>1$, potom řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence; její koeficienty nekonvergují k nule. Pokud $A=1$, platí totéž.

Pokud $0<A<1$, potom

$$\frac{A^k}{A^k+1}|\sin k|\leq\frac{A^k}{1+A^k}\leq\frac{A^k}{1}=A^k,$$

a protože $\sum A^k$ je absolutně konvergentní (geometrická) řada, řada konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

(j)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sinh kx+\cosh kx}{e^{2kx}},$$

kde $x\in\mathbb{R}$.

Řešení:

Upravme

$$\frac{\sinh kx+\cosh kx}{e^{2kx}}=\frac{e^{kx}-e^{-kx}+e^{kx}+e^{-kx}}{2e^{2kx}}=\frac{e^{kx}}{e^{2kx}}=\frac{1}{e^{kx}}=e^{-kx}.$$

Odtud je zřejmé:

1. Pro $x\leq 0$ řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence; koeficienty řady nekonvergují do nuly.

2. Pro $x<0$ řada konverguje absolutně, neboť

$$\sum_k|(-1)^k e^{-kx}|=\sum_k(e^{-x})^k$$

je konvergentní geometrická řada, protože $0<e^{-x}<1$.

3. (a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

Řešení: Pro $|z| < 1$ konverguje absolutně podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim \frac{\frac{|(-1)^{n+2}|\,|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|(-1)^{n+1}|\,|z|^{n}}{n}} = \lim \frac{|z|}{1}\frac{n}{n+1} = |z| < 1.$$

Pro $|z| > 1$ diverguje, neboť limita koeficientů buď neexistuje nebo není nulová. Pro $z = 1$ řada konverguje podle Leibnizova kritéria (neabsolutně), neboť posloupnost $\{\frac{1}{n}\}$ je monotónní a konverguje k nule.
Pro $z = -1$ řada diverguje, neboť $\frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = -1/n$ a řada $\sum -\frac{1}{n}$ je harmonická s minusem.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1 + x^{2k}}$$

Řešení: Pokud $x = 0$, řada konverguje absolutně (triviální). Odhad (zapomenutí členu x^{2k} ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \right| \leq |x|^k$$

dává, že pro $|x| < 1$ řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.
Pokud $x = \pm 1$, řada konvergovat nemůže, neboť $a_k = \frac{(\pm 1)^k}{1+(\pm 1)^{2k}} = \frac{(\pm 1)^k}{2} \not\to 0$.
Nechť nyní $|x| > 1$. Potom odhad (zapomenutí jedničky ve jmenovateli)

$$\left| \frac{x^k}{1 + x^{2k}} \right| \leq \left| \frac{x^k}{x^{2k}} \right| = \frac{1}{|x|^k}$$

dává, že řada konverguje absolutně srovnáním s geometrickou řadou.

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3k + 4}{2k^4 + 3}$$

Řešení: Platí, že (pro $k \geq 4$)

$$\left| (-1)^k \frac{2k^2 + 3k + 4}{2k^4 + 3} \right| = \frac{2k^2 + 3k + 4}{2k^4 + 3} = \frac{1}{k^2} \frac{2 + 3/k + 4/k^2}{2 + 3/k^4} \leq \frac{1}{k^2} \frac{2 + 1 + 1}{2} = \frac{2}{k^2}. \blacksquare$$

Tento odhad dává absolutní konvergenci naší řady pomocí srovnávacího kritéria.

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$$

Řešení:

Odhad

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} = \frac{1}{k}\frac{2+3/k+4/k}{2} \geq \frac{1}{k}\frac{2}{2} = \frac{1}{k}$$

dává, že řada nemůže konvergovat absolutně podle srovnávacího kritéria (neboť harmonická řada není konvergentní). Je ale jednoduché ověřit, že

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ukážeme, že konvergence je od jistého členu monotónní. Tedy, že

$$\frac{2k^2+3k+4}{2k^3} \geq \frac{2(k+1)^2+3(k+1)+4}{2(k+1)^3}.$$

Úpravou dostaneme

$$2(2k^2+3k+4)(k+1)^3 \geq 2k^3(2k^2+4k+2+3k+3+4)$$
$$2(2k^2+3k+4)(k^3+3k^2+3k+1) \geq 4k^5+14k^4+18k^3)$$
$$4k^5+18k^4+38k^3+46k^2+30k+8 \geq 4k^5+14k^4+18k^3$$
$$4k^4+20k^3+46k^2+30k+8 \geq 0$$

což je samozřejmě pravdivá nerovnost pro libovolné k přirozené.

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

Řešení:

Pro $|x| < 1$ konverguje absolutně podle podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4 \cdot |x|^{k+1}}{k^4 \cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^4}{k^4} \cdot |x| = |x| < 1.$$

Pokud $|x| \geq 1$, nekonverguje, neboť $\lim k^4|x|^k = +\infty$, a proto není možné, aby $\lim k^4 x^k = 0$.

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^2\pi)\left(\sqrt{k+9}-\sqrt{k}\right)$$

Řešení: Platí, že k^2 je liché, právě když k je liché. Proto

$$\cos(k^2\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Dále je

$$\sqrt{k+9}-\sqrt{k} = \frac{9}{\sqrt{k+9}+\sqrt{k}} \geq \frac{9}{\sqrt{k}}.$$

Z těchto výpočtů je zřejmé, že řada absolutně konvergovat nemůže (řada $\frac{9}{\sqrt{k}}$ není konvergentní), ale konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria.

(g)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$

Řešení:

Absolutní konvergence je vyloučena odhadem $\frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2k-1}$. Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně.

Leibnizovo kritérium lze použít přímo, protože nerovnosti

$$2k{+}1 \leq 2(k{+}1){-}1, \quad 2k{-}1 \leq 2(k{+}1){+}1 \implies \frac{1}{2k+(-1)^k} \geq \frac{1}{2(k+1)+(-1)^{k+1}}$$

jsou pravdivé.