13. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Fakta

První fakt o „goniometrických" řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$

sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ mají stejně omezené částečné součty.

Druhý fakt o „goniometrických" řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují (neabsolutně).

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 + 3n + 4}{3n^2 + 2}$$

2. Určete, zda následující řady konvergují absolutně i neabsolutně.

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \cos k\pi$$

(b) Použijte Leibnize a pak Abela

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \frac{k^2}{k^2+1}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$$

(d) Rozepište na $\frac{\sin k}{k} \cdot \frac{k^2}{k^2+1}$, použijte Abela. Ke konvergenci $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin k}{k}$ užijte Dirichleta a roztržení na sudé a liché členy.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin k}{k^2+1}$$

(e) Užijte faktu $2\sin^2 = 1 - \cos 2k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k}$$

(f) Pro neabsolutní konvergenci použijeme srovnání s předchozí řadou. Pro absolutní konvergenci opět přepíšeme sinus jako výše a postupujeme analogicky předchozím příkladům.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k\sin^2 k}{k^2+1}$$

(g)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{\ln k}$$

(h) Fakt: $2\cos k = 1 + \cos 2k$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos^2 k}{\ln k}$$

(i)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{A^k+1}\sin k,$$

kde $A > 0$.

(j) Užijeme: $2\cosh y = e^y + e^{-y}$, $2\sinh = e^y - e^{-y}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sinh kx + \cosh kx}{e^{2kx}},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

3. Rozhodněte o neabsolutní i absolutní konvergenci následujících řad (v závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$).

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 x^k$$

(e)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+(-1)^k}$$