12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Řešení: Užijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{22^n} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

$1/2 < 1$, tedy řada konverguje.

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{2^{2n}+3^{2n}}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{4^n+9^n}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{6}{\sqrt[n]{9^n}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} < 1,$$

tedy řada konverguje.

3.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

Řešení:

Otestujeme nejprve nutnou podmínku konvergence. Použijeme větu a převedeme n-tou odmocninu na podíl

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

tedy řada diverguje.

4.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Řešení: Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4^n(n!)^2(2n+3)!}{4^{n+1}(n+1)!^2(2n+1)!} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{4}\frac{(2n+3)(2n+2)}{(n+1)^2} - 1\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{4n^2+10n+6-4n^2-8n-4}{4(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n}{4n^2+8n+4} = \frac{1}{2} < 1,$$

tedy řada diverguje.

5.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

Řešení: Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0.$$

Řada konverguje.

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k$$

Použijeme zobecněné odmocninové kritérium. Je

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2+(-1)^k}{7}\right)^k} = \limsup_{k\to\infty} \frac{2+(-1)^k}{7} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1,$$

(dokonce rovnost), řada tedy konverguje. Limes superior je nutno použít, protože limita by neexistovala, zato limes superior existovat musí.

7.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k+3^k}$$

Řešení: Nejprve odhadneme $\frac{k^7}{2^k+3^k} \le \frac{k^7}{3^k}$. Řada $\sum \frac{k^7}{3^k}$ konverguje podle Abelova podílového kritéria, neboť je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^7}{3^{k+1}}}{\frac{k^7}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{k}\right)^7 = \frac{1}{3} < 1.$$

Původní řada pak konverguje podle srovnávacího kritéria.

8.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

Řešení: $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$ Podílové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!5^n}{(n+1)!(n+1)!(2n)!5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \frac{1}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5} < 1.$$

Tedy řada konverguje.

9.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\frac{1}{n}$$

Řešení: Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{n}\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1$$

tedy řada konverguje.

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$$

Řešení: Odmocninové kritérium, verze (a).

$$\left|\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right| \le \frac{2}{3}$$

Tuto nerovnost ověřte! Našli jsme $q<1$, které omezuje posloupnost a_n $\forall n$, tedy řada konverguje.

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

Řešení:

Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{n+1-2} = \frac{1}{e^2} < 1,$$

tedy řada konverguje.

12.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n-1}$$

Řešení: Nejprve odhadneme tak, že zvětšíme čitatel.

$$\frac{n^2+1}{2^n-1} \le \frac{n^2+n^2}{2^n-1} = \frac{2n^2}{2^n-1}$$

Nyní řada $\sum \frac{n^2}{2^{n-1}-1}$ konverguje podle Abelova kritéria, neboť

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{-1}-1/2^n}{1-1/2^n} = \frac{2^{-1}}{1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Pomocí srovnávacího kritéria dostáváme, že původní řada je konvergentní.

13.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení:

Řada nekonverguje, neboť

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

14.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$$

Řešení: Použijeme odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2-1}$$
$$\stackrel{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 < 1,$$

tedy řada konverguje.