12. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Hinty

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Příklady

Určete, zda následující řady konvergují

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{2^{2n} + 3^{2n}}$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

6. $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2 + (-1)^k}{7}\right)^k$$

7. $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7}{2^k + 3^k}$$

8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}$$

9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{1}{n}$$

10. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^n$$

11. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

12. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n - 1}$$

13. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

14. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{(n-1)n(n+1)}$$

Dokažte, nebo najděte protipříklad.

1. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$.
2. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ konverguje, potom konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
3. Pokud $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, potom řada $\sum a_n$ konverguje.
4. Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq 1$.
5. Pokud $\sum a_n$ konverguje, potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $a_{n+1} \leq a_n$ pro všechna $n \geq n_0$.