11. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

nazýváme *m-tým částečným součtem řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem nekonečné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pokud tato limita existuje. Tuto limitu (tj. součet řady) budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} s_m.$$

Jestliže existuje $\lim_{m\to\infty} s_m$ vlastní (tj. jestliže má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konečný součet), pak říkáme, že řada *konverguje*, neboli *je konvergentní*. Jestliže limita neexistuje nebo existuje, ale je nevlastní, pak říkáme, že řada *diverguje*, neboli *je divergentní*.

Poznámka 2. Konvergence řady nezávisí na konečně mnoha členech. Přesněji, následující podmínky jsou ekvivalentní pro řadu $\sum a_n$:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje;

(ii) existuje $k \in \mathbb{N}$, že $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje;

(iii) pro každé $k \in \mathbb{N}$ řada $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konverguje.

Věta 3 (Nutná podmínka konvergence)**.** Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Věta 4 (Linearita množiny konvergentních řad)**.** (a) Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \cdot a_n \quad \text{konverguje.}$$

Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Nechť řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují. Pak konverguje také řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a platí $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 5 (Srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s **nezápornými** členy. Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Věta 6 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou dvě řady s **nezápornými** členy. Nechť

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = K \in \mathbb{R}^*.$$

(a) Jestliže $K \in (0, \infty)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje.}$$

(b) Jestliže $K = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje.}$$

(c) Jestliže $K = \infty$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konverguje} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{konverguje.}$$

Fakta

1. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje právě když $|q| < 1$.
2. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}$ konverguje pro $\alpha < -1$ a diverguje pro $\alpha \geq -1$.
3. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazýváme *harmonickou řadou.* Harmonická řada diverguje.

Příklady

1. Určete, zda následující řady konvergují

(a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[4]{n}}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$$

(h)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k-2^k}{3^k+2^k}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+1/n)^n}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n}{n^2+2n^3}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

(l)
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\ln k}$$

2. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ jsou divergentní. Rozhodněte, zda platí:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_n$ je konvergentní.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n + d_n$ je divergentní.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n$ je konvergentní.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n + l \cdot b_n$, kde $k, l \in \mathbb{R}$ je konvergentní.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ je konvergentní.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot d_n$ je konvergentní.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot d_n$ je konvergentní.