(c) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

**Řešení:** Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a vše je jasné.
Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro $x_1$. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$x_{n+1} = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) = \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}.$$

Přitom evidentně $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.
Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé $n$ přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost $x_n$ je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $L = \sqrt{a}$. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

(1a) 3. (a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} \\ &\overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= e \cdot e \cdot e = \underline{\underline{e^3}}\end{aligned}$$

(1b) (b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n}$$

(1b) **Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}$$

U druhého rovnítka jsme použili větu o mocnině a limitě. U poslední rovnosti jsme užili limitu vybrané posloupnosti, neb posloupnost $a_{2n}$ musí mít stejnou limitu jako $a_n$, což známe a víme, že jde k $e$.

(1c) (c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1-1} \overset{VOAL}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)} = \frac{e^2}{1}$$

Poslední rovnost upravíme podobně jako příklad předchozí a vyjde $e^2$.

(1a) (d)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{1}\right)^{-1}$$

$$\overset{VOAL}{=} \frac{1}{e}$$

Úvahy o větách viz výše.

(1e) (e)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

**Řešení:**

(1e)

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt $n$ tak, že

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

Zároveň zjevně

$$1 < \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$n$-tá odmocnina tuto nerovnost nepokazí (promyslete) a tak můžeme odhadovat

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \lim_{n\to\infty} \leq \sqrt[n]{10} = 1,$$

takže z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

(15)



## Limita posloupnosti - komplexní úloha VIII

*Úloha číslo: 860*

VŠ

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n\right],$$

kde $[\,\cdot\,]$ značí funkci nazývanou celá část definovanou pro všechna reálná čísla tak, že $[x]$ je nejvyšší celé číslo menší nebo rovné $x$. Například $[2]=2$, $[-1]=-1$, $[1{,}3]=1$, $[1{,}7]=1$ a $[-1{,}3]=-2$ (protože $-2$ je nejvyšší celé číslo *menší* než $-1{,}3$).

### Řešení

Určujeme limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n\right],$$

kde symbol [...] nejsou pouze závorky, ale značí speciální funkci celá část popsanou v zadání úlohy.

Nejprve se zaměříme na vnitřek této funkce.

Ze vztahu

$$A^4-B^4=(A-B)(A^3+A^2B+AB^2+B^3)$$

plyne, že

$$A-B=\frac{A^4-B^4}{A^3+A^2B+AB^2+B^3}.$$

Pokud položíme

$$A=\sqrt[4]{n^4+4n^3},\qquad B=n,$$

dostáváme identitu

$$\sqrt[4]{n^4+4n^3}-n=$$

$$=\frac{n^4+4n^3-n^4}{\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^3}+\sqrt[4]{(n^4+4n^3)^2}\cdot n+\sqrt[4]{n^4+4n^3}\cdot n^2+n^3}=$$

kterou lze upravit na tvar

$$=\frac{4n^3}{n^3\sqrt[4]{(1+4/n)^3}+n^3\sqrt[4]{(1+4/n)^2}+n^3\sqrt[4]{1+4/n}+n^3}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt[4]{(1+4/n)^3}+\sqrt[4]{(1+4/n)^2}+\sqrt[4]{1+4/n}+1}.$$

Uvědomme si nyní, že podle úlohy Limita pod odmocninou I a věty o aritmetice limit platí, že

$$\lim\sqrt[4]{(1+4/n)^3}=1,\quad \lim\sqrt[4]{(1+4/n)^2}=1,\quad \lim\sqrt[4]{(1+4/n)^1}=1,$$

a tudíž

$$\lim\left(\sqrt[4]{(1+4/n)^3}+\sqrt[4]{(1+4/n)^2}+\sqrt[4]{1+4/n}+1\right)=1+1+1+1=4.$$

Z toho podle definice vlastní limity posloupnosti vyplývá, že od nějakého členu počínaje je

$$\sqrt[4]{(1+4/n)^3}+\sqrt[4]{(1+4/n)^2}+\sqrt[4]{1+4/n}+1<5.$$

Zároveň si všimněme, že pro všechny členy platí

$$\sqrt[4]{(1+4/n)^3}+\sqrt[4]{(1+4/n)^2}+\sqrt[4]{1+4/n}+1>4.$$

Z toho vyplývá, že od nějakého členu počínaje je

$$0<\frac{4}{\sqrt[4]{(1+4/n)^3}+\sqrt[4]{(1+4/n)^2}+\sqrt[4]{1+4/n}+1}<1,$$

a tudíž celá část zlomku uprostřed je rovna nule. Posloupnost je tedy od nějakého členu počínaje konstantní, rovná nule, a tudíž i výsledná limita je

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n\right] = 0.$$

(1a)

## Limita posloupnosti - komplexní úloha IX

*Úloha číslo: 861*

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+n^n}},$$

kde $[\,\cdot\,]$ značí funkci nazývanou celá část, tj. $[x]$ je rovno nejvyššímu celému číslu menšímu nebo rovnému $x$.

### Řešení

Idea

Určujeme limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right]+\left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+n^n}},$$

kde $[\,\cdot\,]$ značí funkci celá část popsanou v zadání úlohy.

Ukážeme, že limitou je $\infty$. Lze na to přijít tak, že čitatel se aproximativně chová jako mocnina

$$\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3-1}\approx 2\sqrt{n^3}=n^{3/2},$$

zatímco jmenovatel lze seshora odhadnout

$$\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+n^n}\le\sqrt[n]{n^n+n^n+n^n+\cdots+n^n}=n\sqrt[n]{n}\approx n,$$

a tudíž se chová nejvýše jako mocnina $n$. To nasvědčuje tomu, že čitatel roste s vyšší mocninou $n$ než jmenovatel, ale předchozí heuristické úvahy se musí velmi pečlivě formalizovat, aby byl popsaný postup korektní.

Začneme tím, že odhadneme čitatel zespoda. K tomu využijeme, že celá část čísla je větší nebo rovna stejnému číslu umenšenému o jedničku, tudíž

$$\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right] \geq \sqrt{n^3+1} - 1 + \sqrt{n^3-1} - 1 \geq$$

$$\geq \sqrt{n^3+1} - 2 \geq \sqrt{n^3} - 2 = n^{3/2} - 2.$$

Zároveň odhadneme jmenovatel zespoda. K tomu využijeme nejprve výše zmíněný odhad

$$\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n} \leq \sqrt[n]{n^n + n^n + n^n + \cdots + n^n} = n\sqrt[n]{n},$$

a nyní si uvědomíme, že podle úlohy Limita posloupnosti – n-tá odmocnina II je

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1,$$

tudíž od nějakého členu počínaje je

$$\sqrt[n]{n} \leq 2,$$

a tedy od stejného členu počínaje platí

$$\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n} \leq \sqrt[n]{n^n + n^n + n^n + \cdots + n^n} = n\sqrt[n]{n} \leq 2n.$$

Od tohoto členu počínaje tedy máme odhad, že

$$\frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n}} \geq \frac{n^{3/2} - 2}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Podle části (b) úlohy Věta o dvou policajtech je tedy také

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\sqrt{n^3+1}\right] + \left[\sqrt{n^3-1}\right]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \cdots + n^n}} = +\infty.$$

(1c)

## Limita posloupnosti - komplexní úloha XIV

*Úloha číslo: 866*

VŠ

Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\left[\sqrt{n}\right]+\left[2\sqrt{n}\right]+\cdots+\left[n\sqrt{n}\right]},$$

kde $[\,\cdot\,]$ značí funkci nazývanou celá část. Ta je pro všechna reálná čísla definována tak, že $[x]$ je rovno nejvyššímu celému číslu, které je menší nebo rovno $x$.

### Řešení

Určujeme limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{\left[\sqrt{n}\right]+\left[2\sqrt{n}\right]+\cdots+\left[n\sqrt{n}\right]},$$

kde $[\,\cdot\,]$ značí funkci nazývanou celá část popsanou v zadání úlohy.

Úlohu budeme řešit pomocí odhadu posloupnosti zespoda i seshora, které povedou na stejnou limitu. Podle tvrzení úlohy Věta o dvou policajtech bude mít i původní posloupnost tutéž limitu.

Jmenovatel můžeme seshora odhadnout postupem

$$\left[\sqrt{n}\right]+\left[2\sqrt{n}\right]+\cdots+\left[n\sqrt{n}\right] \le$$

$$\le \sqrt{n}+2\sqrt{n}+\cdots+n\sqrt{n} = \sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}$$

a zespoda postupem

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[2\sqrt{n}\right] + \cdots + \left[n\sqrt{n}\right] \geq$$

$$\geq \sqrt{n} - 1 + 2\sqrt{n} - 1 + \cdots + n\sqrt{n} - 1 = \sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Pro celý zlomek tedy máme odhady

$$\frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} \leq \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\left[\sqrt{n}\right] + \left[2\sqrt{n}\right] + \cdots + \left[n\sqrt{n}\right]},$$

$$\frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2} - n} \geq \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\left[\sqrt{n}\right] + \left[2\sqrt{n}\right] + \cdots + \left[n\sqrt{n}\right]}.$$

Pokud ukážeme, že posloupnosti, jejichž $n$-tý člen je určen menším i větším zlomkem, mají stejnou limitu, bude mít tutéž hodnotu i hledaná limita.

A protože podle věty o aritmetice limit máme, že

$$\lim \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2} - n} =$$

$$= \lim \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}(n+1)}\right)} =$$

$$= \lim \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \lim \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{n}(n+1)}} =$$

$$= \lim \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{1}{1-0} =$$

$$= \lim \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}\frac{n(n+1)}{2}},$$

přičemž poslední zlomek odpovídá druhému z uvažované dvojice, vidíme, že stačí ukázat, že jeho limita existuje.

Zkrácením dostaneme, že

$$\lim \frac{n\sqrt{n}\,\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\sqrt{n}^{\frac{n(n+1)}{2}}} =$$

$$= \lim \frac{\sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{\frac{n+1}{2}} =$$

a následným vytknutím zpod odmocniny

$$= \lim \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}}}{\frac{1}{2}} =$$

$$= \lim 2 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}}.$$

Ukážeme, že poslední limita je rovna dvěma. K tomu opět použijeme úlohu Věta o dvou policajtech. Pro $n \geq 2$ máme totiž odhady

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}} \leq \sqrt[n]{1 + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^n}} = \sqrt[n]{2+n} \leq \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n},$$

přitom limita levé strany je zjevně rovna jedné a o pravé straně to plyne z úloh Limita posloupnosti – n-tá odmocnina I a Limita posloupnosti – n-tá odmocnina II.

Tudíž

$$\lim 2 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}} = 2{\cdot}1 = 2.$$

Tento vztah nám ukazuje, že čitatel zlomku (samozřejmě druhým zlomkem počínaje) se zkrátí se jmenovatelem zlomku následujícího (pokud za ním ovšem ten následující je). Uvažovaný výraz se pak podstatně zjednoduší a bude mít tvar

$$\frac{1\cdot 2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}.$$

Takto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}.$$

▲

**Příklad 1.12.** Určete $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

*Řešení.* Zde můžeme být na značných rozpacích, jak postupovat. Ale v čitateli je mnohočlen a mnohočleny často umíme rozložit. Jistě by bylo příjemné, kdyby se některý činitel v rozkladu mnohočlenu $k^3+6k^2+11k+5$ zkrátil proti $(k+1)!$. Zkusíme tedy např. zda $k+1$ nedělí uvažovaný mnohočlen. Bohužel však zjistíme, že v bodě $k=-1$ má mnohočlen hodnotu $-1$. Tedy $k+1$ náš mnohočlen nedělí, ale z našeho výsledku plyne, že $k+1$ dělí mnohočlen $(k^3+6k^2+11k+5)+1$. Odtud je pak již jen krůček ke zjištění, že

$$k^3+6k^2+11k+5=(k+1)(k+2)(k+3)-1.$$

S použitím tohoto výsledku dostáváme

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)(k+3)-1}{(k+3)!}=\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+3)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}-\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k!}=\\&=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}.\end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)=\\&=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

▲

**Příklad 1.13.** Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1=0$, $a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$ pro $n\geq 2$. Určete $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

*Řešení.* V tomto příkladě je posloupnost definována pomocí rekurentní formule. Vypočteme-li první tři členy, zjistíme, že

$$a_1=0<a_2=\frac{3}{4}<a_3=\frac{15}{16}.$$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, alespoň na svém začátku, působí dojmem, že by mohla být rostoucí a shora omezená číslem 1. Zkusme tedy tato tvrzení dokázat. Zřejmě $a_1<a_2$. Předpokládejme tedy, že $a_k<a_{k+1}$ pro

všechna $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Upravujeme-li nerovnost, jejíž platnost ovšem chceme teprve dokázat, dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1}, \\ \frac{a_{n-1}+3}{4} &< \frac{a_n+3}{4}, \\ a_{n-1}+3 &< a_n+3, \\ a_{n-1} &< a_n, \end{aligned}$$

přičemž poslední nerovnost podle indukčního předpokladu platí. Předchozí postup ovšem nemůžeme považovat za důkaz, spíše za návod k důkazu. Formální důkaz by postupoval přesně opačným směrem. Podle indukčního předpokladu platí $a_{n-1} < a_n$. Odtud úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} a_{n-1}+3 &< a_n+3, \\ \frac{a_{n-1}+3}{4} &< \frac{a_n+3}{4}, \\ a_n &< a_{n+1}. \end{aligned}$$

Tím je tedy dokázáno, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí. Ukážeme nyní, že $a_n < 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $a_1 < 1$. Předpokládejme, že $a_k < 1$ pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Potom

$$a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4} < \frac{1+3}{4} = 1,$$

čímž je omezenost posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dokázána. Podle Věty 1.9 má tedy posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu. Označíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. V rovnosti $a_n = \frac{a_{n-1}+3}{4}$ pišme $n+1$ místo $n$. Dostáváme rovnost

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4},$$

která platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Přechodem k limitě na obou stranách této rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3}{4}, \\ a &= \frac{1}{4}(\lim_{n\to\infty} a_n + 3), \\ a &= \frac{1}{4}(a+3), \\ &\boxed{a = 1.} \end{aligned}$$

Připomeňme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ na základě Věty 1.12, protože posloupnost $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je vybraná z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukázali jsme tedy, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Ukažme si ale ještě, než ukončíme tento příklad, jak jinak můžeme dospět k přesvědčení, že číslo 1 by mohlo být horní hranicí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Postup, který ukážeme, se nám může hodit i leckdy jindy. K přesvědčení, že $a_n < 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsme původně dospěli odhadem. Pak jsme ovšem tuto nerovnost dokázali. Můžeme však postupovat i takto: Chceme-li dokázat, že $a_n < c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ ($c$ ovšem zatím neznáme), bylo by dobré, kdybychom byli schopni dokázat, že $a_n < c$ implikuje $a_{n+1} < c$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4} < \frac{c+3}{4}.$$

Kdyby nyní platilo $\frac{c+3}{4} = c$, byl by náš důkaz hotov. Z této rovnice ale ihned dostáváme $c = 1$.

Můžeme ale nabídnout ještě další postup pro určení kandidáta na horní hranici posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. V okamžiku, kdy už víme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí, můžeme uvažovat následujícím způsobem: Horní hranicí rostoucí konvergentní posloupnosti je její limita. Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, označme $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Přechodem k limitě v rovnosti $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{4}$ úplně stejně jako výše zjistíme, že $a = 1$. Takže, má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec horní hranici, potom číslo $a = 1$ je její horní hranicí. ▲

VZOR

**Příklad 1.14.** Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána předpisem $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

*Řešení.* Jedná se opět o posloupnost definovanou rekurentně, takže zkusíme stejný postup jako v Příkladě 1.13. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vůbec monotonní, zjistíme téměř jistě druh monotonnosti srovnáním prvních dvou členů $a_1$ a $a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)$. (Nic nezjistíme pouze v případě $a_1 = a_2$.) Vyšetřujme tedy např. nerovnost

$$\begin{aligned} a_1 &< a_2, & a_1 &< \frac{1}{a_1}, \\ a_1 &< \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right), & a_1^2 &< 1, \\ 2a_1 &< a_1 + \frac{1}{a_1}, & a_1 &< 1. \end{aligned}$$

Zdá se tedy, že pro $a_1 < 1$ by naše posloupnost mohla být neklesající a pro $a_1 > 1$ nerostoucí. Každopádně je ale jasné, že pro $a_1 = 1$ je konstantní, přesněji $a_n = 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předchozí domněnka o monotonnosti je však velký omyl, který nám ukazuje, jak opatrní při matematických soudech musíme být. Jak ale zjistíme, že se jedná o omyl, a jak nalezneme správnou odpověď? Pokračujeme-li v našich předchozích úvahách, je přirozené snažit se v případě $a_1 < 1$ dokázat, že naše posloupnost je neklesající. Vyšetřujme proto nerovnost $a_n \leq a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n+1}, \\ a_n &\leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \\ a_n &\leq \frac{1}{a_n}, \\ a_n &\leq 1. \end{aligned}$$

(Při násobení číslem $a_n$ nedojde k obrácení nerovnosti, neboť jak se snadno dokáže indukcí $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost s kladnými členy.) Jistě by tedy bylo dobré dokázat, že $a_n \leq 1$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \geq 2$ zde dostáváme

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1, \\ \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right) &\leq 1, \\ a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} &\leq 2, \\ a_{n-1}^2 + 1 &\leq 2a_{n-1}, \\ (a_{n-1} - 1)^2 &\leq 0, \end{aligned}$$

(2c)



## Limita rekurentně zadané posloupnosti V

*Úloha číslo: 878*

VŠ

Rozhodněte, zda existuje nebo neexistuje limita posloupnosti zadané rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2),$$

kde $0 \leq a \leq 1$, a pokud existuje, určete ji v závislosti na hodnotě parametru $a$ !

### Řešení

Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a vše je jasné.

Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 < x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro $x_1$. Odvodíme indukcí, že poté platí také

$$0 < x_{n+1} < \sqrt{a}.$$

Máme totiž, že

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2),$$

což lze upravit na tvar

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n^2 + x_n + \frac{1}{2}a,$$

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}\left(x_n^2 - 2x_n\right) + \frac{1}{2}a,$$

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_n - 1)^2 + \frac{1}{2}(a + 1).$$

Druhá mocnina bude nejmenší pro co nejmenší kladné $x_n$, tudíž

$$x_{n+1} < -\frac{1}{2}(0-1)^2 + \frac{1}{2}(a+1) = \frac{1}{2}a < \sqrt{a}$$

za předpokladů na $a$.

Z toho ale vyplývá, že

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0,$$

a tudíž posloupnost $\{x_n\}$ je rostoucí.

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje její vlastní limita $L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2))$$

$$L = L + \frac{1}{2}(a - L^2)$$

$$L^2 = a$$

$$L = \pm\sqrt{a}.$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze

$$L = \sqrt{a}.$$

Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

# 7. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

## Příklady

1. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

   (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$

   **Řešení:** Pro $n$-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

   Posloupnost $x_n$ je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné $n$; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

   Protože posloupnost je monotónní a omezená, konverguje, tj. má vlastní limitu $L$. Tuto limitu lze nyní navíc snadno spočítat, neboť

$$\lim x_{n+1} = \lim \sqrt{2 + x_n}$$

$$L = \sqrt{2+L}$$

$$\boxed{L = 2.}$$

   (b)

$$x_0 > 0, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right).$$

   Dokažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

   **Řešení:** Ukážeme, že posloupnost je omezená a monotónní, tedy konvergentní. Označíme-li potom její limitu $L$, potom musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

odkud plyne, že

$$L = \lim \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \Leftrightarrow L = \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 1.$$

Zřejmě tedy limitou, pokud je posloupnost konvergentní, může být pouze číslo $-1$ nebo $+1$. Protože $x_0 > 0$, jsou všechny členy posloupnosti nezáporné (díky rekurentnímu vzorci), a tedy minus jednička nepřichází v úvahu. Zbývá dokázat konvergenci, tj. monotonii a omezenost. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (AG-nerovnost) vyplývá, že pro libovolné $a > 0$ je

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

a tedy platí, že libovolný člen posloupnosti s výjimkou $x_0$ je větší než 1.

$$\boxed{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - x_n^2}{x_n}\right) \leq 0.$$

Odtud plyne, že posloupnost je klesající (přičemž ostře, pokud $0 < x_0 \neq 1$, neboť v AG-nerovnosti nastává rovnost pouze tehdy, dělá-li se průměr stejných čísel). Z toho, že posloupnost je od druhého členu klesající plyne, že je omezená, neboť platí, že

$$0 < x_n \leq \max\{x_0, x_1\}.$$

(c) Nechť $0 \leq a \leq 1$. Vypočtěte limitu posloupnosti definované rekurentně vztahy

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2).$$

**Řešení:** Pokud $a = 0$, pak je posloupnost identicky nulová a vše je jasné. Nechť tedy $a \neq 0$ a nechť $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Tato nerovnost jistě platí pro $x_1$. Pak $x_n = \sqrt{a} - \varepsilon$, kde $\varepsilon \leq \sqrt{a}$ a protože platí, že $\sqrt{a} \leq 1$, je také $\varepsilon \geq \sqrt{a}\varepsilon$, a proto

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(a - (\sqrt{a} - \varepsilon)^2) = \sqrt{a} - \varepsilon + \frac{1}{2}(2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2) \\ &= \sqrt{a} + (\sqrt{a}\varepsilon - \varepsilon) - \varepsilon^2 \leq \sqrt{a} - \varepsilon^2 < \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Přitom evidentně $x_{n+1} \geq 0$, protože pro $x_n < \sqrt{a}$ je přírůstek $\frac{1}{2}(a - x_n^2)$ kladné číslo. Indukcí jsme tak dokázali, že pokud $x_n < \sqrt{a}$, potom také $x_{n+1} < \sqrt{a}$.

Tím jsme indukcí dokázali, že posloupnost je omezená a že pro každé $n$ přirozené platí, že $0 \leq x_n < \sqrt{a}$. Z toho plyne, že posloupnost $x_n$ je rostoucí, protože

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(a - x_n^2) > 0.$$

Z toho plyne, že posloupnost je konvergentní a existuje vlastní limita $\lim x_n = L$. Z toho plyne, že musí platit

$$\lim x_{n+1} = \lim(x_n + \frac{1}{2}(a - x_n^2)) \Leftrightarrow L = L + \frac{1}{2}(a - L^2) \Leftrightarrow L^2 = a \Leftrightarrow L = \boxed{\pm\sqrt{a}.}$$

Protože ale všechny členy posloupnosti jsou kladné, připadá v úvahu pouze $\boxed{L = \sqrt{a}.}$ Snadno se ověří, že výsledek platí i pro speciální případ $a = 0$.

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

**Řešení:**

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n}} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$$

Z Věty o limitě vybrané posloupnosti máme, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e,$$

tedy lze nalézt $n$ tak, že

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} < 10.$$

Zároveň zjevně

$$1 < \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$$

$n$-tá odmocnina tuto nerovnost nepokazí (promyslete) a tak můžeme odhadovat

$$1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \lim_{n\to\infty} \leq \sqrt[n]{10} = 1,$$

takže z Věty o dvou policajtech máme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} = 1.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$$

**Řešení:**
Použijeme větu o součinu omezené a mizející posloupnosti, $1 \geq \sin n \leq 1$, $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, tedy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}$$

**Řešení:** Tato posloupnost limitu nemá, neb členy začnou být záhy záporné pod odmocninou a tedy nejsou definované.

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n+1}{n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^\alpha}\frac{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1} = \begin{cases} 1, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ \infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$
**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+(3n+2)^4}{n^\alpha+n^4} = \lim_{n\to\infty} 3^4 n^4 \frac{(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^2+(1+\frac{2}{3n})^4}{n^\alpha+n^4} = \begin{cases} 81/2, & \alpha = 4 \\ 0, & \alpha > 4 \\ 81, & \alpha < 4 \end{cases}$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2}$$

$\alpha \in \mathbb{N}$ **Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^4-(n^2+1)^2}{n^\alpha+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^4-2\cdot 4n^3+\cdots+2^4)^4-(n^4+2n^2+1)}{n^\alpha+n^2}$$
$$= \begin{cases} -8, & \alpha = 3 \\ 0, & \alpha > 3 \\ -\infty, & \alpha < 3 \end{cases}$$

(g)

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$

**Řešení:** Odstraněním odmocniny z čitatele pomocí vhodného rozšíření (viz jmenovatel následujícího zlomku) máme

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n^\alpha \left(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \frac{(n^2+1)-(n^2-1)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^\alpha}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}}
\end{aligned}$$

a vytknutím $n^{4/3}$ ze jmenovatele dostaneme

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}}$$

a) Pro $\alpha = 4/3$ vyjde

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} = \frac{2}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

b) Pro $\alpha > 4/3$ vyjde

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} = (+\infty)\cdot\frac{2}{3} = +\infty$$

c) Pro $\alpha < 4/3$ vyjde

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-4/3} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+1/n^2)^2} + \sqrt[3]{1+1/n^2}\sqrt[3]{1-1/n^2} + \sqrt[3]{(1-1/n^2)^2}} = 0\cdot\frac{2}{3} = 0.$$

(h) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3-n} - an - b) = 0$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3-n} - an - b) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n - (an+b)^3}{(n^3-n)^{2/3} + (n^3-n)^{1/3}(an+b) + (an+b)^2}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 - n - (a^3n^3 + 3a^2n^2b + 3anb^2 + b^3)}{(n^3-n)^{2/3} + (n^3-n)^{1/3}(an+b) + (an+b)^2}
\end{aligned}$$

Vedoucí člen ve jmenovateli je $n^2$, v čitateli $n^3(1-a^3)$. Aby byla limita vlastní, musí být $a=1$. Pak v čitateli zbývá $3a^2n^2b$, což též musí zmizet, jinak by limita byla $>0$. Tedy $b=0$.

(i) Určete $\alpha > 0$ tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)}$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^\alpha+1)^3+\alpha(-1)^n}{n^2(\sqrt{n^2+1}-n)} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha} \frac{(1+\frac{1}{n^\alpha})^3+\frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}}{n^2} \cdot n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{3\alpha-1}\left[\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^3+\frac{\alpha(-1)^n}{n^{3\alpha}}\right]\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right) \\
&= \begin{cases} 2, & \alpha = 1/3 \\ \infty, & \alpha > 1/3 \\ 0, & \alpha < 1/3 \end{cases}
\end{aligned}$$

(j)

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n)$$

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n}-2n)\cdot\frac{\sqrt{4n^2-n}+2n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\sqrt{4n^2-n}+2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{-1}{\sqrt{4-\frac{1}{n}}+2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(k)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)+1}{(n+2)-1} = 1.$$

(l)

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi)$$

**Řešení:**

$$\lim_{n\to\infty}(1+\sin n\pi) \overset{VOAL}{=} 1+\lim_{n\to\infty}\sin n\pi = 1+0 = 1.$$