2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

Řešení: Vhodným vytknutím plyne

$$\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \lim \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$$

Řešení: Mohli bychom postupovat vytknutím, ale zde to jde jednodušseji. Limitu roztrhneme pomocí věty o aritmetice limit na pět kusů.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{2}{5,0001}\right)^n +$$

$$+ \left(\frac{3}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{4}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{5}{5,0001}\right)^n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0,$$

neboť v každé závorce je koeficient ostře menší než jedna.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$$

Řešení: Nejrychleji ze členů ve zlomku roste faktoriál. Proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n(n!)} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1}$$

$$= 1 \cdot \frac{0 + 0 + 1}{0 + 1} = 1.$$

(1)(a) (d)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme třetí větu a budeme zjišťovat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1} + 3^{n+1}}{n^2 + 2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}^n\right) + \frac{1}{3}} = \frac{0 + 0 + 1}{0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

(1)(b) (e)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n},$$

kde $a, b, c > 0$

(1)(b) **Řešení:** Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n\to+\infty} a \cdot \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} = a$$

podle věty o dvou policajtech, neboť $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}$.

(f) (1)(c)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$$

pro $a > b > 0$

Řešení: Vytkněme a^n v čitateli a a^{2n} ve jmenovateli. Je $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a^2} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + (b/a)^n}}{\sqrt[n]{1 + (b/a)^{2n}}} \right) = \frac{1}{a},$$

neboť $0 < b/a < 1$, a tudíž je $\sqrt[n]{\frac{1+(b/a)^n}{1+(b/a)^{2n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+1}{1}} = \sqrt[n]{2}$, a tedy limita členu v závorce je podle věty o dvou policajtech rovna jedné.

(g) (1d)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$$

Řešení: Upravíme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 1))^{n+1}}{(n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+3)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1} n^{n+1} (1 + 3/2n)^{n+1}}{3^{n-1} n^{n-1} (1 + 1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1 + 3/2n)^{n+1}}{(1 + 1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6 \cdot 2^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1 + 3/2n)^{n+1}}{(1 + 1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{(1 + 3/2n)(1 + 1/n)} \cdot \frac{1 + 3/2n}{1 + 1/n} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Platí totiž pro každé $a > 0$, k přirozené :

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim \sqrt[n]{n^k} = 1$$

a také, že

$$1 \leq \sqrt[n]{(1 + 3/2n)(1 + 1/n)} \leq \sqrt[n]{4}$$

a krajní limity jdou k jedné, tudíž podle věty o dvou policajtech také limita prostřední.

(2)(a)

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sin n\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Hrom. body: $\left\{-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$

limsup 1

liminf -1

(2)(b) $$\lim_{n\to\infty} 3\left(1-\frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$

n liché: $3-\frac{3}{n}-2 = 1-\frac{3}{n} \to 1$ liminf

n sudé: $3-\frac{3}{n}+2 = 5-\frac{3}{n} \to 5$ limsup

(2)(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n+\sin 4n)^2}$$

$$= \lim \frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{2+\frac{2}{n}+\frac{\sin 2n}{n}}{\frac{\cos 3n}{n}+4+\frac{\sin^2 4n}{n^2}+\frac{4\sin 4n}{n}}$$

2 policajti

$$\overset{VOAL}{=} \frac{2+0+0}{0+4+0+0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} = \lim = \text{limsup} = \text{liminf}$$

(2ch) $$\lim_{n\to\infty} (\cos \pi n)^n \cdot n$$

n liché: $(-1)\cdot n$

sudé: $1 \cdot n$

limsup $= \infty$

liminf $= -\infty$

6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Najděte lim sup a lim inf posloupností

(a)

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Řešení: Protože posloupnost je konvergentní, platí, že

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \lim x_n = 1.$$

(2d) (b)

$$x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

Řešení: Posloupnost není konvergentní. Je ale lehké ukázat, že má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = (2 + \frac{3}{n})$ a $x_{2n+1} = -(2 + \frac{3}{n})$. Proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = -2.$$

(2e) (c)

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

Řešení: Je lehké ukázat, že posloupnost má jen dva hromadné body, a to limity vybraných podposloupností $x_{2n} = \frac{1}{n} + 1$ a $x_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Proto

$$\limsup x_n = 1, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(2f) (d)

$$x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Řešení: Protože $\cos\frac{n\pi}{2}$ nabývá popořadě hodnot $0, -1, 0, 1$, jsou nenulové pouze sudé členy posloupnosti. Ty jsou rovny

$$x_{2n} = 1 - \frac{2n}{2n+1} \to 0, \qquad x_{4n} = 1 + \frac{4n}{4n+1} \to 2.$$

Liché členy posloupnosti jsou nulové. Hromadné body posloupnosti jsou tedy nula a dva, proto

$$\limsup x_n = 2, \qquad \liminf x_n = 0.$$

(2g) (e)

$$x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Řešení: Člen $n(n-1)/2$ je sudý pro $n = 4k$ a $n = 4k+1$, naopak pro $n = 4k+2$ a $n = 4k+3$ je lichý. Posloupnost x_n tedy tvoří čtyři konstantní podposloupnosti:

$$x_{4n} = 1+2+3 = 6, \quad x_{4n+1} = 1-2+3 = 2, \quad x_{4n+2} = 1+2-3 = 0, \quad x_{4n+3} = 1-2-3 = -4.$$

Z toho plyne, že $\limsup x_n = \sup x_n = 6$ a $\liminf x_n = \inf x_n = -4$.

(f)

$$x_n = (-1)^n n$$

Řešení: Podposloupnosti $x_{2n} = 2n$ a $x_{2n+1} = -2n-1$ rostou do $+\infty$, resp. klesají do $-\infty$. Tím je vše jasné a je

$$\limsup x_n = \sup x_n = +\infty, \qquad \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

(2i) (g)

$$x_n = -n[2 + (-1)^n]$$

Řešení: Posloupnost je konvergentní, protože $-n[2+(-1)^n] \leq -n \to -\infty$. Proto

$$\limsup x_n = \liminf x_n = \inf x_n = -\infty.$$

2. Spočtěte limitu rekurentně zadané posloupnosti

(a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$
Řešení: Pro n-tý člen máme vzorec

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}}.$$

Posloupnost x_n je zřejmě ostře rostoucí, neboť nerovnost $x_{n+1} > x_n$ se lehce ověří (např. umocněním). Dokážeme, že $x_n \leq 2$ pro libovolné n; umocňováním na druhou totiž postupně dostáváme

$$x_n \leq 2 \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow 2 + \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n-1 \text{ odmocnin}} \leq 2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 2.$$

(2)(j) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

n liché $\quad \frac{-2n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \to -2+1 = -1 \quad = \liminf$

n sudé $\quad \frac{2n}{n+1} + \sqrt[n]{2} \to 2+1 \quad = 3 \quad = \limsup$

(3) (a) $M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$

pak $a_i = m_i \bmod_{k+1}$

(b) $a_n = \langle 1, 1,2, 1,2,3, 1,2,3,4, \dots \rangle$

(c) Nechť a_n je taková, že mna jejích hr. bodů je rovna $\mathbb{N}$.

Pak lze vybrat podposloupnost takové, že

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & \to 1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & \to 2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & \to 3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & \to 4
\end{array}$$

Vybereme diagonálně $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} \dots$

tato posloupnost jde do ∞, což je spor.