8. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak definujeme

$$\limsup a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora omezená} \\ \infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ shora neomezená.} \end{cases}$$

Tuto hodnotu nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Obdobně definujeme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem

$$\liminf a_n := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k; k \geq n\}, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola omezená} \\ -\infty, & \text{jestliže je } a_n \text{ zdola neomezená.} \end{cases}$$

Definice 2. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Pak $A \in \mathbb{R}^*$ nazveme *hromadnou hodnotou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 3 (O vztahu limes superior, limes inferior a hromadných hodnot)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Potom $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$, $\limsup a_n = \max H(\{a_n\})$ a $\liminf a_n = \min H(\{a_n\})$ (maximum a minimum se uvažuje v $\mathbb{R}^*$).

Věta 4 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Nechť posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Fakta

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$
2. $a > 1$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.
3. $\beta > 0$, $a > 1$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{a^n} = 0$.
4. $\alpha > 0$, $\beta > 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^\beta} = 0$.

Nechť $a > 0$.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^a} = 1$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

Příklady

1. Spočtěte limity

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

   (b) $a, b, c > 0$
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

   (c) $a > b > 0$,
   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$$

   (d)
   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$$

2. Spočtěte limitu, neexistuje-li, najděte limes superior a inferior a hromadné body

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$$

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$

   (c)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 2n + n\sin 2n}{n\cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$$

   (d)
   $$\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)$$

   (e)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

   (f)
   $$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$$

   (g)
   $$\lim_{n\to\infty} 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

   (h)
   $$\lim_{n\to\infty} (\cos \pi n)^n n$$

   (i)
   $$\lim_{n\to\infty} -n[2 + (-1)^n]$$

   (j)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$$

Teorie

3. (a) Nechť M je konečná množina přirozených čísel. Najděte posloupnost a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna M.

   (b) Najděte posl. a_n takovou, že její množina hromadných bodů je rovna $\mathbb{N} \cup \infty$.

   (c) Ukažte, že nelze najít takovou posloupnost, aby množina jejích hromadných bodů byla rovna $\mathbb{N}$.