5. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

1. (a) $\lim_{n\to+\infty} 2^n$

   Řešení: Odhadneme $n \leq 2^n$, a tedy z Věty o limitě a uspořádání

   $$\lim_{n\to\infty} 2^n \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

   (b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   Řešení: Dokážeme z definice, že limita je rovna 0.
   Zvolme $\varepsilon > 0$. Hledáme n_0 tak, aby pro $\forall n$ bylo

   $$\left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

   Zvolme

   $$n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right].$$

   Předpoklad je pak zjevně splněn.

   (c) $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

   Řešení: Z věty o dvou policajtech

   $$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{-1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   $$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0$$

   .

   (d) $\lim_{n\to+\infty} (-2)^n$

   Řešení: Ukážeme, že limita neexistuje. Najdeme vybrané posloupnosti s odlišnými limitami. Pro sudé členy máme

   $$a_{2n} = 2^{2n} \to \infty$$

   a pro liché

   $$a_{2n+1} = -2^{2n+1} \to -\infty,$$

   tedy limita neexistuje (věta o limitě vybrané posloupnosti).

2. (a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$$

Řešení: Vhodným vytknutím plyne

$$\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \lim \frac{\left(\frac{-2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{-2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n}$$

Řešení: Mohli bychom postupovat vytknutím, ale zde to jde jednodušeji. Limitu roztrhneme pomocí věty o aritmetice limit na pět kusů.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n}{5,0001^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{2}{5,0001}\right)^n +$$

$$+ \left(\frac{3}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{4}{5,0001}\right)^n + \left(\frac{5}{5,0001}\right)^n = 0+0+0+0+0 = 0,$$

neboť v každé závorce je koeficient ostře menší než jedna.

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)}$$

Řešení: Nejrychleji ze členů ve zlomku roste faktoriál. Proto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + n^5 + (n+1)!}{n(n^6 + n!)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n(n!)} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \frac{\frac{3^n}{n!} + \frac{n^5}{n!} + 1}{\frac{n^6}{n!} + 1}$$

$$= 1 \cdot \frac{0+0+1}{0+1} = 1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

Řešení: Použijeme třetí větu a budeme zjišťovat $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 + 2^{n+1} + 3^{n+1}}{n^2 + 2^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1}{\frac{n^2}{3^{n+1}} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}^n\right) + \frac{1}{3}} = \frac{0+0+1}{0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3}} = 3$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n},$$

kde $a, b, c > 0$

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \geq b \geq c$. Potom platí, že

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = \lim_{n\to+\infty} a \cdot \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} = a$$

podle věty o dvou policajtech, neboť $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + (b/a)^n + (c/a)^n} \leq \sqrt[n]{3}$.

(f)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right)$$

pro $a > b > 0$

Řešení: Vytkněme a^n v čitateli a a^{2n} ve jmenovateli. Je $\sqrt[n]{a^{2n}} = a^2$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a^n + b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n} + b^{2n}}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{a^2} \left(\frac{\sqrt[n]{1 + (b/a)^n}}{\sqrt[n]{1 + (b/a)^{2n}}} \right) = \frac{1}{a},$$

neboť $0 < b/a < 1$, a tudíž je $\sqrt[n]{\frac{1+(b/a)^n}{1+(b/a)^{2n}}} \leq \sqrt[n]{\frac{1+1}{1}} = \sqrt[n]{2}$, a tedy limita členu v závorce je podle věty o dvou policajtech rovna jedné.

(g)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}}$$

Řešení: Upravíme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{((n+2)^2 - (n+1)^2)^{n+1}}{((n+1)^3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 2n + 1))^{n+1}}{(n^3 + 3n^2 + 3n + 3 - n^3 - 3n^2)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n+3)^{n+1}}{(3n+3)^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1} n^{n+1} (1 + 3/2n)^{n+1}}{3^{n-1} n^{n-1} (1 + 1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^{n+1}}{n^{n-1}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/2n)^{n+1}}{(1+1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{6 \cdot 2^n}{3^n}} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{\frac{(1+3/2n)^{n+1}}{(1+1/n)^{n-1}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt[n]{n^2} \cdot \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)} \cdot \frac{1+3/2n}{1+1/n} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1+0}{1+0} = \frac{2}{3}.$$

Platí totiž pro každé $a > 0$, k přirozené :

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1, \qquad \lim \sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim \sqrt[n]{n^k} = 1$$

a také, že

$$1 \leq \sqrt[n]{(1+3/2n)(1+1/n)} \leq \sqrt[n]{4}$$

a krajní limity jdou k jedné, tudíž podle věty o dvou policajtech také limita prostřední.

1. (a)

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{2}{n}\frac{1}{n}\le\lim_{n\to\infty}1\cdot1\cdot1\cdots1\cdot\frac{1}{n}=0.$$

Jedničky jsou posloupnost omezená, $1/n$ je posloupnost mizející, takže dle věty pro mizející a omezenou posloupnost a dle věty o dvou policajtech (vše je větší než 0) máme, že limita $=0$.

(b) pro $a>1$ je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

Řešení: Použije se limitní verze podílového testu. Platí totiž

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}}{a^n}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a}{n+1}=0<1.$$

(c) Pro $\beta>0$ a $a>1$ dokažte, že

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\beta}{a^n}=0.$$

Řešení: Označme $a_n=\frac{n^\beta}{a^n}$. Stačí použít limitní verzi podílového testu. Platí totiž, že

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^\beta}{a^{n+1}}}{\frac{n^\beta}{a^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}\cdot\frac{a^n}{a^{n+1}}=\frac{1}{a}\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta=\frac{1}{a}<1.$$

Dodejme, že $\lim(\frac{n+1}{n})^\beta=1^\beta=1$ plyne z věty o mocnině limity posloupnosti.

2. (a)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$$

(b)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

(c)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^a}=1$$

(d)

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$$

Začneme od konce.

(d) Klíčem je odhad $n! \geq n^{n/2}$ (pro n sudé). Dá se snadno dokázat indukcí nebo třeba následující úvahou: $1 \cdot n \geq n$, $2 \cdot (n-1) = 2n-2 \geq n$ (pro $n \geq 2$), $3 \cdot (n-2) = 3n-3 \geq n$ (pro $n \geq \frac{3}{2}$, bohatě tedy pro $n \geq 2$) atd.

Z toho vyplývá, že pro libovolné n je $n! \geq n^{n/2}$ (pro n sudé) nebo $n! \geq n^{\frac{n-1}{2}}$ (pro n liché).

Z toho vyplývá, že pro $n \geq 2$ je

$$\sqrt[n]{n!} \geq n^{\frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}} \geq n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = n^{1/4} = \sqrt[4]{n} \to +\infty.$$

Tvrzení o limitě je nyní zřejmé.

(c) Plyne ihned z (b) pomocí věty o mocnině limity posloupnosti, neboť

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^a} = \lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^a = \left(\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}\right)^a = 1^a = 1.$$

(a) Stačí dokázat tvrzení pro $a > 1$, neboť pro $a = 1$ je zřejmé a pro $0 < a < 1$ je $1/a > 1$ a vše vyplyne počítáním pomocí věty o limitě podílu:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1/a}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1/a}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Pro $a > 1$ si ukážeme dvě řešení:

1) Posloupnost je zřejmě klesající a zdola omezená, neboť $\sqrt[n]{a} > 1$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, musí tedy být konvergentní. Existuje tedy $\lim \sqrt[n]{a} = L$. Zároveň musí existovat a být ji rovna limita vybrané podposloupnosti $\lim \sqrt[2n]{a} = L$. Na druhou stranu ovšem musí platit

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[2n]{a} = \lim_{n \to +\infty} a^{1/2n} = \lim_{n \to +\infty} (a^{1/n})^{1/2} = \left(\lim_{n \to +\infty} a^{1/n}\right)^{1/2}$$
$$= L^{1/2} = \sqrt{L}.$$

Musí tedy být rovno $\sqrt{L} = L$, což je možné jedině tehdy, jestliže $L = 1$ nebo $L = 0$. Protože $\sqrt[n]{a} > 1$ pro každé n, nepřichází nula v úvahu (viz počátek bodu 2).

2) Klasické řešení poskytuje tzv. *Bernoulliova nerovnost*, která říká, že pro každé $x \geq -1$ (dokonce $x \geq -2$) platí, že

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \text{pro každé } n \text{ přirozené.}$$

Tato nerovnost se jednoduše dokáže matematickou indukcí. Potom lze využít odhad pro $a > 1$

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(1 + \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)\right)^n \geq 1 + n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right),$$

z čehož ihned vyplývá, že

$$0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0.$$

Zbytek zařídí věta o dvou policajtech.

(b) Všechny postupy ukázané v části (a) lze použít i zde, ale je potřeba být při jejich použití jemnější.

1) Pro postup 1) není tak docela jasné, že posloupnost $\sqrt[n]{n}$ je klesající, to se musí dokázat a není to vůbec jednoduché, pokud nechcete zkoumat průběh funkce $x^{1/x}$, k čemuž musíte umět (dobře) derivovat.
2) Bernoulliovu nerovnost lze použít též, ale nejde to tak přímočaře jako v případě (a). Díky ní platí odhad pro n sudé

$$\sqrt{n} = (\sqrt[n]{n})^{n/2} = (1+(\sqrt[n]{n}-1))^{n/2} \geq 1+\frac{n}{2}((\sqrt[n]{n})-1) \geq 1+\frac{n-1}{2}((\sqrt[n]{n})-1)$$

Pro n liché lze postupovat podobně, pouze dva kroky budou přehozené a využije se monotonie funkce x^n:

$$\begin{aligned}\sqrt{n} = (\sqrt[n]{n})^{n/2} = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^{n/2} &\geq (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^{(n-1)/2}\\ &\geq 1 + \frac{n-1}{2}((\sqrt[n]{n}) - 1).\end{aligned}$$

Z obou odhadů plyne, že pro libovolné n platí

$$0 \leq (\sqrt[n]{n} - 1) \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} \to 0.$$

Proto platí podle věty o dvou policajtech

$$\lim(\sqrt[n]{n} - 1) = 0 \implies \lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bonus

(3)(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n+2^n}}$

$$\frac{3^n+2\cdot 2^n - 3^n - 2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}} = \frac{2^n}{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}$$

tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}+\sqrt{3^n+2^n}} = \sqrt{3}$$

$\sqrt{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} \le \qquad \le \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}}$

$\le \lim \sqrt[n]{2\cdot \sqrt{2\cdot 3^n}} = \lim \sqrt[n]{2}\cdot \sqrt[n]{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}^n}$

$= \sqrt{3}$

2 policajti :

(3d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}} \overset{VOAL}{=} \frac{3}{2}$

$\cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} = 3$

$\lim \sqrt[n]{3^n} \leq \qquad \leq \lim \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3$

$\parallel$

3

2 policajti

$\cdot \lim \sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}} \leq \lim \sqrt[2n]{4^n+4^n}$

$\lim \sqrt[2n]{4^n} \leq \qquad = \sqrt{4} = 2$

$\parallel$

2

(3e) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2 \sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} =$

$= \cancel{\lim \frac{\sqrt[2n]{n}}{\sqrt[2n]{n}} \cdot (-1)^n \cdot \frac{n^2 \sqrt[2n]{n}}{}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot (-1)^n \cdot \frac{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}{1+\frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3}} \overset{VOAL}{=} \frac{0}{1+0} = 0$

(3) (g)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n + \left(1-\frac{1}{n}\right)^n} = 1$$

2 policajti:

$$\sqrt[n]{2\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \geq \qquad \geq \sqrt[n]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = 1+\frac{2}{n} \to 1$$

$$= \underset{\substack{\Downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{2}} \cdot \underset{\substack{\Downarrow \\ 1+0}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

(3) (h) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}$

$$= \lim \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n} \cdot \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \sin 2^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n \cos n!}} = \frac{4}{5}\cdot 1$$

neb 2 policajti.

$$\sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}} \geq \sqrt[n]{\frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \sin(2^n)}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n \cos n!}} \geq \sqrt[n]{\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n}}$$

$$\text{VI} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{VI}$$

$$\sqrt[n]{\frac{2}{\frac{1}{5}}} \geq \qquad\qquad\qquad \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$$

$$\swarrow$$
$$1$$