

$$(1) \lim_{u \rightarrow \infty} u = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sqrt{u} = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{u}} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^u = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{2^u} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{-u} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} 2^u = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \ln u = \infty$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u! = \infty$$

$$(2) \lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^u \neq \dots$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^u \cdot \frac{1}{u} = 0$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^u \cdot u \neq \dots$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \cos(\pi u) \cdot \sqrt{u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^u \sqrt{u} \neq \dots$$

$$(3) (a) \lim_{n \rightarrow \infty} -n^8 + 2n^3 - 4 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8} \right)$$

$$\stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{2}{n^5} - \frac{4}{n^8} \right) =$$

$$\stackrel{\text{VOAL}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} -1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^5} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^8} \right) = \infty \cdot (-1 + 0 - 0)$$

$$= \underline{\underline{-\infty}}$$

$$(b) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2u^5 + 2u - 7}{u^5 - 6u^2 + 4} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^5}{u^5} \cdot \frac{2 + \frac{2}{u^4} - \frac{7}{u^5}}{1 - \frac{6}{u^3} + \frac{4}{u^5}}$$

$$\stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim_{u \rightarrow \infty} 2 + \frac{2}{u^4} - \frac{7}{u^5}}{\lim_{u \rightarrow \infty} 1 - \frac{6}{u^3} + \frac{4}{u^5}} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{\lim_{u \rightarrow \infty} 2 + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2}{u^4} - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{7}{u^5}}{\lim_{u \rightarrow \infty} 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{6}{u^3} + \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{4}{u^5}}$$

$$= \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = \underline{\underline{2}}$$

$$(3)(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5u^3 + u - 5}{n^2 + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{5u + \frac{1}{u} - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{8}{n^2}}$$

$$\text{VOAL} = \frac{\infty + 0 - 0}{1 + 0} = \underline{\underline{\infty}}$$

$$(3)(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{1/n^{1/3}}{1+1/n}$$

$$\text{VOAL} = \frac{0}{1+0} = \underline{\underline{0}}$$

$$(4)(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = \infty + \infty = \underline{\underline{\infty}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{1} = \underline{\underline{1}}$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) - (n)}{n^2-3 - (n+2)^2} \cdot \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{-4n-7} \cdot \frac{\sqrt{n^2-3} + \sqrt{n^2+4n+4}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{(-1)}{-4-\frac{7}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{3}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1}}$$

$$\text{VOAL} = \frac{-1}{-4-0} \cdot \frac{1}{\infty} \cdot \frac{\sqrt{1-0} + \sqrt{1+0+0}}{\sqrt{1-0} + \sqrt{1}} = \underline{\underline{0}}$$

3. cvičení

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/>
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. Z definice určete

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Řešení: chceme dokázat, že: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$.

Jelikož $n > 0$, můžeme absolutní hodnotu přepsat na: $\frac{1}{n} < \varepsilon$, což znamená, že potřebujeme zajistit, aby $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Tedy stačí zvolit $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right]$ (horní celá část), pak $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy pro $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ platí, že $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log n$$

Řešení: Ze znalostí základních funkcí odhadneme, že limita bude asi ∞ . Takže uijeme definici nevlastní limity:

Definice 1. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže platí:

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \geq k$$

(resp.

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : a_n \leq k).$$

Tedy zvolme $k \in \mathbb{R}$ a hledáme n_0 , aby pro $\forall n \geq n_0$ byla $a_n \geq k$. Logaritmus je rostoucí záležitost, stačí tedy najít vhodné n_0 , zbytek bude platit triviálně. Dosadíme-li n_0 do předpisu, získáme:

$$\ln n_0 \geq k.$$

Vypustíme na to exponenciálu, která je taktéž rostoucí funkcí, tedy nezmění znaménko nerovnosti:

$$n_0 \geq e^k.$$

Nyní už jsme hotovi, stačí volit $n_0 := \lceil e^k \rceil + 1$ a z předchozích úvah plyne vše potřebné.

2. Spočtete

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$$

Řešení: Užijeme opakovaně větu o aritmetice limit, promyslete si, kde přesně.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5(2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5})}{n^5(1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5})} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{2}{n^4} - \frac{7}{n^5})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{6}{n^3} + \frac{4}{n^5})} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^4} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^5}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n^3} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^5}} = \frac{2 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8}$$

Řešení: Opět věta o aritmetice limit, ale už to nebudeme rozepisovat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 5}{n^3 + 8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(\frac{5}{n} + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^3})}{n^3(1 + \frac{8}{n^3})} = \frac{0 + 0 - 0}{1 + 0} = 0$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin(n!)}{n + 1}$$

Řešení: Funkce sinus je omezená, tedy:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1) \cdot \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin(n!)}{n + 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1} = 0$$

(d)

5a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n + 1)}{n + 2} - \frac{n}{2} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n + 1) - n(n + 2)}{2(n + 2)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-n}{2(n + 2)} \right\} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

5b

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\}$$

Řešení: použitím vztahu $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$ máme

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{n^3} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 1/n)(2 + 1/n)}{1} \\ &= (1 + 0)(2 + 0) = 2. \end{aligned}$$

6a

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$$

Řešení: Roznásobíme závorky podle binomické věty a nebudeme se zbytečně trápit s malými mocninami:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{100} + 100 \cdot 4n^{99} + \dots)(n^{100} + 100 \cdot 3n^{99} + \dots)}{(n^{100} + 100 \cdot 2n^{99} + \dots) - n^{100}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{99}(\dots)}{2n^{99}(\dots)} = \frac{1}{2}$$

6b

(g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n}, \quad \text{kde } |a|, |b| < 1$$

Řešení: Stačí si uvědomit, jaký je součet geometrické řady a věta o aritmetice limit...: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. Limita vyjde: $\frac{1-b}{1-a}$

5c

(h)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

Řešení: Použijeme trik:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

. Nyní aplikováno na limitu získáme:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Ocásek sumy je maličký (jde k nule), a všechny členy kromě jedničky se sežerou... Tedy výsledek je roven 1.

6g

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Řešení: Použijeme opět trik:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

Když si nyní limitu rozepíšeme, začnou se nám závorky navzájem krátit s jmenovateli a zbyde nám 1/2 a malý zbytek. Tedy limita je rovna 1/2.

6h

(j)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$

(6)

Řešení: Řešíme na základě znalosti nerovnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

což jde k nule. Zespoda je limita také omezená, vše je kladné. Čili celkem je rovna 0.

4. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Příklady

1. (a) Najděte suprema a infima následujících množin v \mathbb{R} :

$$\mathbb{N} \quad \inf = 1 \quad \sup \text{ neexistuje}$$

$$(0; 2] \quad \inf = 0 \quad \sup = 2$$

$$(0; 1) \cap \mathbb{Q} \quad \inf = 0 \quad \sup = 1$$

$$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\} \quad \inf = -2 \quad \sup \text{ neexistuje}$$

$$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\} \quad \inf \text{ neexistuje} \quad \sup \text{ neexistuje}$$

$$\{\arctan x; x \in \mathbb{R}\} \quad \inf = -\pi/2 \quad \sup = \pi/2$$

2. (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$$

Řešení: Najdeme vybrané podposloupnosti s různými limitami. Kupříkladu pro n dělitelná 8 získáme $\sin(2\pi) = 0$, zatímco pro n , která mají po dělení 8 zbytek 2 získáme $\sin(1/2\pi) = 1$. Takže máme 2 různé podposloupnosti s různými, dosti vzdálenými limitami. Stačí použít Větu o limitě vybrané posloupnosti. Jiný způsob je použít Bolzano–Cauchyho podmínku: zvolíme $\epsilon < 1$ a najdeme protipříkladová n_0 pomocí úvahy výše.

- (b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$$

Řešení: Jednak když se podíváme na úlohu, můžeme zkusit odhadnout limitu. Odmocnina zmenšuje rozdíly, takže můžeme doufat, že rozdíl se bude zmenšovat a limita půjde k nule. A teď formálně - rozšíříme vhodným zlomkem tak, abychom se zbavili odmocnin:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cdot \frac{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{(n+1)^{2/3} + \sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n} + n^{2/3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3}}{n^{2/3}} \frac{\frac{1}{n^{2/3}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \\ &= \frac{0}{\sqrt[3]{1+0+0} + \sqrt[3]{1+0} + 1} = 0 \end{aligned}$$

Uvědomíme si, že jsme použili Větu o aritmetice limit.

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

Řešení: Nejprve se soustředíme na sudé členy a zlomek rozšíříme:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2}) \cdot \frac{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Pro liché členy spočítáme limitu úplně stejně, vyjde nám $-1/2$. Čili limita neexistuje.

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$$

Budeme pracovat se zlomkem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[6]{(n^3+1)^2} - \sqrt[6]{(n^2+1)^3}$$

Ten rozšíříme, aby nám zmizela šestá odmocnina. Měla by vyjít 0.

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$$

Řešení: Rozdělíme opět na sudé a liché členy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 2 = 3 - 2 = 1$$

Čili opět máme dvě různé limity, ale jedna posloupnost nemůže mít 2 limity. Tedy limita neexistuje.

(f)

6f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}}$$

Řešení: Rozšíříme jmenovatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$ odstranili odmocninu ve jmenovateli. Rozšíříme čitatel tak, abychom podle vztahu $(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$ odstranili odmocninu v čitateli. Vzniklé odmocniny se již nebudou odečítat.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6} - \sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2+1}\sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}}$$

6f

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2} \sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2} \sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{6} \cdot \frac{\sqrt[3]{(n^2+6)^2} + \sqrt[3]{n^2} \sqrt[3]{n^2+6} + \sqrt[3]{(n^2)^2}}{\sqrt[3]{(n^2+7)^2} + \sqrt[3]{n^2+1} \sqrt[3]{n^2+7} + \sqrt[3]{(n^2+1)^2}} = 1 \cdot \frac{1+1+1}{1+1+1} = 1. \end{aligned}$$

(Uvědomte si, že čítec i jmenovatel mají největší mocninu $n^{4/3}$, mají tři sčítance a ve všech je u koeficientu $n^{4/3}$ jednička. Anebo poctivě vytkněte $n^{4/3}$ v čitateli i jmenovateli a proveďte limity – dostanete tři jedničky v čitateli i jmenovateli.)

(g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2}$$

Řešení: Goniometrické funkce jsou omezené, a tedy nezájímavé. Nejvíce rostoucí člen je v čitateli i jmenovateli n^2 , vytkneme jej tedy:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 2n + n \sin 2n}{n \cos 3n + (2n + \sin 4n)^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2} \frac{2 + 2/n + (\sin 2n)/n}{(\cos 3n)/n + (2 + (\sin 4n)/n)^2} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{2 + 0 + 0}{0 + 2^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Limity typu $\frac{\sin \text{cokoliv}}{n}$, $\frac{\cos \text{cokoliv}}{n}$ konvergují k nule podle věty "omezená posloupnost krát nula".

3. Pro jaké posloupnosti (a_n) existuje $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n a_n$?

Řešení: Pokud je $a_n \geq 0$, pak limita existuje, právě když $\lim a_n = 0$.

Jestliže $\lim a_n = 0$, potom $\lim (-1)^n a_n = 0$ podle věty o limitě součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí k nule (jednoduchý důsledek věty o dvou polícajtech).

Jestliže $\lim a_n \neq 0$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n > n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, je $a_n > \varepsilon$. Potom ale $|a_n - a_{n+1}| > 2\varepsilon$ a není tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci posloupnosti.

2. Pokud a_n střídá znaménka, pak rozlišíme dva případy.

a) $\lim a_n = 0$. Potom $\lim (-1)^n a_n = 0$ ze stejného důvodu jako výše.

b) $\lim a_n \neq 0$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $n > n_0$, kde n_0 je nějaké přirozené číslo, je $|a_n| > \varepsilon$. Protože limitou nemůže být podle předpokladů nula, pak, má-li posloupnost $(-1)^n a_n$ limitu mít, musí od nějakého indexu n_1 (předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $n_1 > n_0$) přestat střídát znaménka. Z toho plyne, že od indexu n_1 lze psát $a_n = (-1)^n b_n$, kde posloupnost b_n od indexu n_1 je stále kladná nebo záporná. Potom $\lim (-1)^n a_n$ existuje právě tehdy, pokud existuje $\lim b_n$ (z podobného důvodu jako v 1. části příkladu).