## Příklady

1. Dokažte, že $\emptyset \subset A$ pro libovolnou množinu $A$. (Uvědomte si, kdy je tvrzení ve tvaru implikace pravdivé.)

2. Nechť $A, B$ jsou množiny. Dokažte, že $A = B$, právě když $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$.

*Tato charakterizace rovnosti je vlastně jen reformulovaná definice, je ale nejběžnějším způsobem, jak v matematice dokázat rovnost dvou množin. Budete ji používat velmi často.*

3. Dokažte, že $A \setminus B = A \cap B'$.

*Návod: použijte předchozí příklad. Konkrétně ukažte, že pro libovolné $x \in (A \setminus B)$ musí takové $x$ náležet do $A \cap B'$. Tím jste ukázali inkluzi $(A \setminus B) \subset (A \cap B')$. Analogicky dokažte opačnou inkluzi a jste hotovi.*

4. Ukažte, že pro množiny $A, B$ platí:
 (i) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$,
 (ii) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

5. Nechť $X, A, B$ jsou množiny. Dokažte tzv. de Morganovy vzorce:
 (i) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$,
 (ii) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

6. Nechť $X$ je množina a $\{A_\gamma \ : \ \gamma \in \Gamma\}$ systém množin (indexovaný prvky množiny $\Gamma$). Dokažte zobecněné de Morganovy vzorce:
 (i) $X \setminus (\cup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \cap_{\gamma\in\Gamma}(X \setminus A_\gamma)$
 (ii) $X \setminus (\cap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma}(X \setminus A_\gamma)$

7. Nechť $A, B, C$ jsou množiny. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:
 (i) $A \cap B = A \iff A \subset B$
 (ii) $A \cup B = B \iff A \subset B$
 (iii) $A \setminus B = C \iff A = B \cup C$

8. Nechť $X, Y$ jsou množiny. Platí, že $X \times Y = Y \times X$? Dokažte nebo vyvraťte.

9. Nechť $X$ je množina o $n$ prvcích. Definujme $P(X)$ jako množinu všech podmnožin $X$. Vypočtěte, kolik množin obsažených v $P(X)$ má právě $k$ prvků. Pomocí binomické věty vypočtěte, kolik prvků má množina $P(X)$.

10. Nechť $X, Y, Z$ jsou množiny. Ukažte, že platí
 (i) $(X - Y) - Z = X - (Y \cup Z) \subset X - (Y - Z)$
 (ii) $X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$

11. Nechť $X, Y, Z$ jsou množiny. Dokažte distributivitu zleva i zprava operace $\times$ je vzhledem k operacím sjednocení a průniku. Tzn. dokažte rovnosti

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z), \qquad X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z).$$

$$(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z), \qquad (X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z).$$

*N1. Definujme symetrický rozdíl množin $A, B$ jako množinu $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Platí pro operaci $\triangle$ asociativní zákon?

*N2. (Alternativní definice uspořádané dvojice.) Definujme množinu $\langle x, y\rangle$ jako množinu obsahující dva prvky: množinu $\{x\}$ a množinu $\{x, y\}$, tj.

$$\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Ukažte, že

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle y_1, y_2\rangle \iff x_1 = y_1,\ x_2 = y_2.$$

*10. Zkuste definovat uspořádanou $n$-tici obdobným způsobem jako uspořádanou dvojici v předchozím příkladu.