6. cvičení

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Podmínky	Dobře definováno	Nedefinováno
$\forall a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$	$-\infty + a = a + (-\infty) = -\infty$	$\infty - \infty$
$\forall a \in \{\infty\} \cup \mathbb{R}$	$\infty + a = a + \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$
	$-(\infty) = -\infty$ $-(-\infty) = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty$	$0 \cdot \infty$
$\forall a \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = -\infty$	0^0
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot \infty = \infty \cdot a = -\infty$	1^∞
$\forall a \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$	$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \infty$	∞^0
	$1/\infty = 0,$ $1/(-\infty) = 0$	$\frac{1}{0}$

Definice 1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že A je *vlastní limitou posloupnosti* $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}: \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim a_n = A$ nebo $a_n \to A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu rovnou ∞, jestliže

$$\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K.$$

Věta 2 (Aritmetika limit)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}*$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}*$. Pak platí:

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$,

(b) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, jsou-li pravé strany definovány.

Věta 3 (O dvou policajtech)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou tři posloupnosti reálných čísel, splňující

(i) $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq\ b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak

$$\lim c_n = A.$$

Věta 4 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou dvě posloupnosti reálných čísel, nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Hinty

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \ldots + A^2B^{n-3} + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

$$(A + B)^n = A^n + \binom{n}{1} A^{n-1} B \binom{n}{2} A^{m-2} B^2 + \cdots + B^n$$

$$1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}$$

$$\frac{1}{k(k + 1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} 1 - \frac{1}{k^2} \quad = \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{(k - 1)(k + 1)}{k^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} \cdots \frac{2n - 1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n + 1}}$$

Příklady

1. Určete limity

(a) $$\lim_{n\to\infty} n$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} n^2$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

(e) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$$

(f) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(g) $$\lim_{n\to\infty} e^n$$

(h) $$\lim_{n\to\infty} e^{-n}$$

(i) $$\lim_{n\to\infty} \ln n$$

(j) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(k) $$\lim_{n\to\infty} 2^n$$

(l) $$\lim_{n\to\infty} n!$$

2. Určete limity

(a) $$(-1)^n$$

(b) $$(-1)^n n$$

(c) $$(-1)^n \frac{1}{n}$$

(d) $$\cos(\pi n)\sqrt{n}$$

3. Spočtěte limity

(a) $$\lim_{n\to\infty} -n^8 + 2n^3 - 4$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5 + 2n - 7}{n^5 - 6n^2 + 4}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3 + n - 5}{n^2 + 8}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n + 1}$$

4. Spočtěte limitu

(a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$$

(b) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

(c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$$

(d) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2-3} - \sqrt{(n+2)^2}}$$

5. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right\}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}\right\}$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

Bonus

6. Spočtěte limity

(a)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n},\quad \text{kde}|a|,|b|<1$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$

(d)
$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

(e)
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$$

(f)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}$$

(g)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

(h)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$$