4. cvičení

http://www.mff.cuni.cz/~kuncova/
kytaristka@gmail.com

Teorie

Definice 1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $s \in \mathbb{R}$ splňující

- $\forall x \in M : x \leq s$,
- $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s \, \exists x \in M : x > s'$,

nazýváme *supremem* množiny M.

Hinty

Příklady

1. Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (a) Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté.
   (b) Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté.
   (c) Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté.
   (d) Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

2. Dokažte trojúhelníkovou nerovnost:
$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

3. Najděte suprema a infima následujících množin v $\mathbb{R}$:

   (a) $$\mathbb{N}$$
   (b) $$(0; 2]$$
   (c) $$(0; 1) \cap \mathbb{Q}$$
   (d) $$\{x \in \mathbb{Z}; x \geq -\sqrt{6}\}$$
   (e) $$\{(-1)^n \sqrt{n}; n \in \mathbb{N}\}$$
   (f) $$\{\operatorname{arctan} x; x \in \mathbb{R}\}$$
   (g) $$\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$$
   (h) $$\{\frac{1 + (-1)^n}{2}; n \in \mathbb{N}\}$$
   (i) $$\{\cos \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{N}\}$$
   (j) $$\{(-1)^n n; n \in \mathbb{N}\}$$

4. Uveďte příklad množiny, která má supremum, ale nemá maximum. Uveďte příklad množiny, která má infimum, ale nemá minimum.

5. Dokažte

   (a)
   $$(\forall \varepsilon)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : |1/\sqrt{n}| < \varepsilon$$

   (b)
   $$(\forall k \in \mathbb{N})\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : \ln n \geq k$$

6. Znegujte následující výrok a tuto negaci dokažte

   (a)
   $$(\exists A \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : |(-1)^n - A| < \varepsilon$$

   (b)
   $$(\forall k \in \mathbb{N})\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0) : (-1)^n n \geq k$$

7. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin ve vztahu k $\sup A$, $\sup B$ a $\inf A$, $\inf B$?

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) $A \triangle B$
   (e) $-A = \{a, a \in A\}$
   (f) $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$
   (g) $A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}$
   (h) $A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A, b \in B\}$