(1)(a) $3 \mid (n^3+2n)$

- $n=1$ $\quad 1+2=3 \quad 3\mid(1^3+2\cdot 1)$ ✓
- k : $\quad 3\mid(k^3+2k)$

$k \rightsquigarrow k+1$

$$(k+1)^3+2(k+1) = k^3+3k^2+3k+1+2k+2$$

$$= \underbrace{k^3+2k}_{3\mid(k^3+2k)} + \underbrace{3k^2+3k+3}_{3\mid 3(k^2+k+1)}$$

tedy $\quad 3\mid\left((k+1)^3+2(k+1)\right)$ ✓

1(b)

- 3 úhelník $\quad 3(n-3)/2$ úhlopříček OK

4-úhelník $\quad 4(4-3)/2 \rightarrow 2$ úhlopříčky  OK

- k : $\quad \frac{k(k-3)}{2}$ úhlop.

$k \rightsquigarrow k+1$ $\quad$ přidáním 1 bodu přidám $k-2$ nových úhlopříček a 1 strana se stane úhlopříčkou.

Tedy

$$\frac{k(k-3)}{2} + k-2+1 \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k-3+1)}{2}$$

$$\frac{k^2-3k+2k-2}{2} \overset{?}{=} \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

$$\frac{k^2-k-2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2} \checkmark$$

(1)(e) ~~b~~ ~~r~~od $n=5$ (a $n=1$, ale to nic)

- $n=5$ $\quad 2^5 \overset{?}{>} 5^2$

  $32 > 25$ ✓

- k: $\quad 2^k > k^2$

$k \rightsquigarrow k+1$ $\quad 2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2\cdot k^2 \overset{?}{>} (k+1)^2$

$$2k^2 \overset{?}{>} (k+1)^2$$

$$k^2 \overset{?}{>} 2k+1$$

$$k^2-2k-1 \overset{?}{>} 0$$

$$k_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2} \qquad k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

platí pro $k > 1+\sqrt{2}$
(mimo širo)

ale to $k \geq 5$ je OK ✓

(2)

A	¬A	B	¬B	A ⇒ B	¬(A ⇒ B)	A ∧ ¬B	OK
+	−	+	−	+	−	−	
+	−	−	+	−	+	+	
−	+	+	−	+	−	−	
−	+	−	+	+	−	−	

A	¬A	B	¬B	A ⇒ B	¬A ∨ B	OK
+	−	+	−	+	+	
+	−	−	+	−	−	
−	+	+	−	+	+	
−	+	−	+	+	+	

(3) (a) $\emptyset \subset A$

- $\emptyset$: $\forall x : x \notin \emptyset$
- $\emptyset \subset A$: $\forall x : x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

dohromady $\forall x \quad x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ ✓

(b) $A = B \Leftrightarrow A \subset B \;\&\; B \subset A$

$\hookrightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in B$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

$x \in B \Rightarrow x \in A$

(c) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

- "$\subseteq$"

nechť $x \in X \setminus (A \cup B)$ to jest $x \in X \;\&\; \underbrace{x \notin A \;\&\; x \notin B}_{x \notin A \cup B}$

chceme: $x \in X \setminus A \;\&\; x \in X \setminus B$

to je ale $x \in X,\ x \notin A \;\&\; x \in X \;\&\; x \notin B$

- "$\supseteq$" $x \in X,\ x \notin A \;\&\; x \in X,\ x \notin B$

$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

- "$\subseteq$"

$x \in X \;\&\; x \notin A \cap B \rightarrow \neg (x \in A \;\&\; x \in B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$

tedy $x \in X \;\&\; (x \notin A \vee x \notin B)$

to je ale mo: $(x \in X \;\&\; x \notin A) \vee (x \in X \;\&\; x \notin B)$ /

(4) (a) $A \cap B = A \overset{?}{\iff} A \subset B$

"$\Leftarrow$" ok

"$\Rightarrow$" chci: $x \in A \Rightarrow x \in B$

mám: $A \cap B \subseteq A$

$A \subseteq A \cap B$

↳ to jé: $x \in A \Rightarrow x \in A$ & $x \in B$, což stačí ✓

(b) $A \cup B = B \iff A \subset B$

"$\Leftarrow$" ok

"$\Rightarrow$" mám: $A \cup B \subseteq B \rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B$

$B \subseteq A \cup B$

to jé ono ✓

chci $A \subset B \rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$ ✓

(c) $A \setminus B = C \iff A = B \cup C$

"$\Leftarrow$" chci $x \in A \setminus B \iff x \in C$

mám: $x \in A \iff x \in B \cup x \in C$

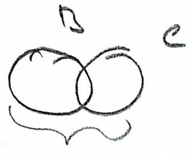
tedy chci ukázat: (1) $x \in A$ & $x \notin B \Rightarrow x \in C$ ✓

(2) $x \in C \Rightarrow x \in A \setminus B$

to nějak nejde

→ co když to není pravda?

proti-příklad



$A = B \cup C$ $\not\Leftarrow$ $A \setminus B = C$

(4)(a) $X \times Y \neq Y \times X$

neb $\{1,2,3\} \times \{0,-1\} \neq \{0,-1\} \times \{1,2,3\}$

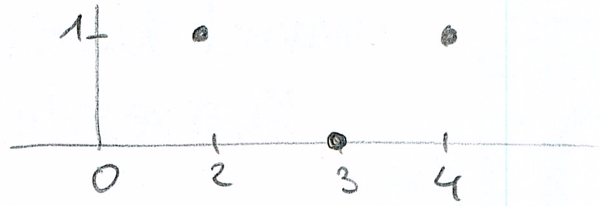
$[1,0],\ [1,-1],\ [2,0] \ldots$ $\qquad$ $[0,1],\ [0,2],\ [0,3] \ldots$

(5) $p(x)$ → mno podmnožin

když je něco podmna, lze znázornit funkcí $\begin{cases} 1 & \text{je tam} \\ 0 & \text{není} \end{cases}$

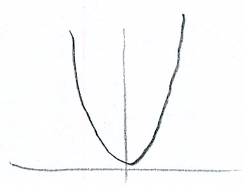
tedy pro $X = \{2,3,4\}$

se podmna $\{2,4\}$ znázorní



tedy $\forall x \in X$ lze přiřadit buď 0 nebo 1 (tedy 2 možnosti). A jejich počet je $2^{|X|}$

(6) $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



mna	obraz
$[0,4]$	$[0,16]$
$[-4,0]$	$[0,16]$
$[-4,4]$	$[0,16]$

mna	vzor
$[0,4]$	$[-2,2]$
$[-4,0]$	$\{0\}$
$[-4,4]$	$[-2,2]$

(7) $f: A \to SPZ$

$g: RA \to RSPZ$

f

? přidáme "SPZ" → prázdné ?

nebo

$D_f = RA$

$H_f = RSPZ$

prosté, není na

invers :((neb je prosté

g

prosté

na

řešitelnost:

$|RA| = |RSPZ|$

inverze

$|RA| = |RSPZ|$ ✓

(8) $f: X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

VZORY A OBRAZY

(a) $f^{-1}(f(A)) \stackrel{?}{=} A$

NE $f = x^2$ $A = [0,2]$

$f^{-1}(f(A)) = [-2,2]$

(b) $f(f^{-1}(B)) \stackrel{?}{=} B$

NE $B = [-4,4]$

$f^{-1}(B) = [0,2]$

$f(f^{-1}(B)) = [0,4]$

$B \supseteq f(f^{-1}(B))$

(a) platí $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

chci $x \in A \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

spor: $x \in A$ & $x \notin f^{-1}(f(A))$

↳ $x \in f(A)$ $\exists y$ ↳ $\forall y \in f(A): f(x) \neq y$

$= \exists y \in f(A): f(x) = y$ ↯

(b) analogicky $y \in f(f^{-1}(B))$, chci $y \in B$ → spor: $y \notin B$

↳ $\exists x \in f^{-1}(B): f(x) = y$ & $y \notin B$

→ $f(x) \notin B$

tedy zatím mám: $x \in f^{-1}(B)$ $\exists z \in B$ $f(x) = z \to f(x) \in B$

& $f(x) \notin B$ ↯

(9) (a) ANO

(b) NE, např. $f(x) = 1$

$A = (-1, 0) \quad B = (1, 2)$

$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$

(c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

"$\subseteq$"

$x \in f^{-1}(A \cup B) \to \exists y \in A \cup B : f(x) = y$

$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = \{t;\ \exists u \in A : f(t) = u\}$

$\cup \{t;\ \exists u B : f(t) = u\}$ ✓

"$\supseteq$" ✓

(d) Přečep $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

"$\subseteq$" $f^{-1}(A \cap B) = \{x;\ \exists y \in A \cap B : f(x) = y\}$

$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \{x;\ \exists y \in A : f(x) = y\}$

$\cap \{x;\ \exists y \in B : f(x) = y\}$

"$\subseteq$" ✓

"$\supseteq$" f je funkce, protože $\forall x\ \exists y \in A : f(x) = y$

$x\ \exists z \in B\ f(x) = z \Rightarrow y = z$ ✓

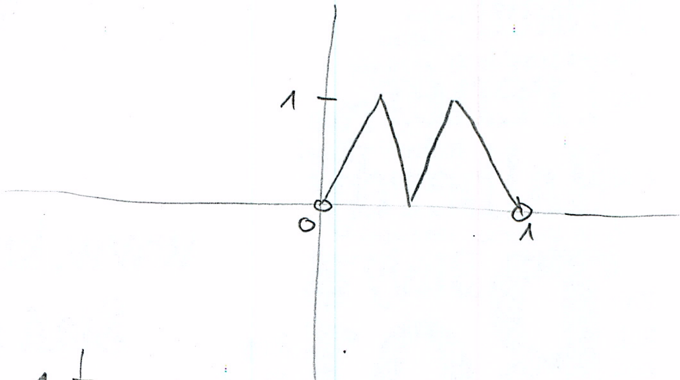
(10) $f(x) = \sin x$ $\qquad g(x) = x^2$

pak $\quad \sin^2 x \neq \sin x^2$

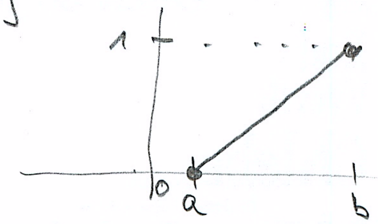
(11) (a) $[0, 1]$ na $[0, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \cdot x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

(b) $(0, 1)$ na $[0, 1]$



(c) $[a, b]$ na $[0, 1]$



$$y = px + q$$

$$\begin{cases} 0 = pa + q \\ 1 = pb + q \end{cases}$$

pak $\quad -1 = p(a-b) \qquad p = \frac{1}{b-a}$

$$q = \frac{-1}{b-a} \cdot a$$

celkem $\qquad f(x) = \frac{1}{b-a} \cdot x + \frac{-a}{b-a}$

(13) $A = \mathcal{P}(\{1,2\})$

$A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$R = \{[\emptyset, \{1\}], [\emptyset, \{2\}], [\emptyset, \{1,2\}],$
$[\{1\}, \{1,2\}], [\{2\}, \{1,2\}]\}$

(14) (a) A lidi, R – "být rodičem"

ne sym., ~~anti~~, tranz., reflex

je antisym.

(b) $A = \mathbb{Z}$, $i R j$ $|i-j| = 1$

ano sym. ~~reflex~~

ne tranz., antisym., reflex.

(c) $A = \mathbb{N}$, $i R j$ $i \cdot j$ sudé

ano sym

ne tranz., antisym., reflex

(12) (a)

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1		1+1=2	3	4	5		
2		3	4	5			
3		4	5				
4		5					
5							

Σ

počet prvků na diagonále začíne 3

+1 +2 +3 +4

y \ x	1	2	3	4	5
1	4	8	13	19	
2	7	12	18	25	
3	11	17	24	32	
4	16	23	31	40	
5					

TRANSPONOVAT

(12) (a) $f(x,y)$

$[x,y] \neq [u,v] \overset{chci}{\Rightarrow} f(x,y) \neq f(u,v)$

sporem

nechť $f(x,y) = f(u,v)$

pak

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y = \frac{(u+v)(u+v+1)}{2} + v$$

$$(x+y)(x+y+1) + 2y = (u+v)(u+v+1) + 2v$$

$$(x+y)(x+y+1) + 2y - 2v = (u+v)(u+v+1)$$

$$(x+y)^2 + (x+y) + 2y = (u+v)^2 + (u+v) + 2v$$

pro $[x,x]$ a $[u,u]$ máme $f(\cancel{x,x}) = f(u,u)$

$$2x(2x+1) + 2x = 2u(2u+1) + 2u$$

$$4x^2 + 4x = 4u^2 + 4u$$

$$x^2+x = u^2+u \Rightarrow x = u$$

neb fce x^2+x je prostá na $(0,\infty)$

indukcí: x, x