Příklady na matematickou indukci

1. Dělitelnost přirozených čísel

Dokažte matematickou indukcí, že následující tvrzení platí pro libovolné přirozené číslo n.

(a) $2 \mid (n^2 + n)$ (b) $3 \mid (n^3 + 2n)$ (c) $6 \mid (10^n - 4)$

(d) $133 \mid (11^{n+2} + 12^{2n+1})$ (e) $17 \mid (5^{n+3} + 11^{3n+1})$ (f) $11 \mid (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n)$

(g) Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.

Zkuste podat také přímý důkaz uvedených tvrzení, (tj. nevyužívající indukční předpoklad). Pokud ne u všech, pak alespoň pro případy (a), (b).

2. Algebraické identity

Dokažte matematickou indukcí, že následující rovnosti platí pro libovolné přirozené číslo n.

(a1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(a2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

(d1) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \ldots + \frac{1}{(n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(d2) $\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

(e) $\frac{1}{1\cdot4} + \frac{1}{4\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$

(f) $\frac{1}{3\cdot7} + \frac{1}{7\cdot11} + \ldots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$

(g) Dokažte vzorce pro částečný součet prvních n-členů aritmetické a geomterické řady.

(h) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

(i) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n + 1)^2 = \frac{4}{3}(n + \frac{1}{2})(n + 1)(n + \frac{3}{2})$

(j) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$

(k) $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, kde i je imaginární jednotka (Moivreova věta)

(l) Formulujte a dokažte binomickou větu.

(m) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$

3. Nerovnosti

Odhady mocnin

Určete, pro která přirozená čísla n platí následující nerovnosti. Dokažte matematickou indukcí.

(a) $2^n > n^2$

(b*) $a^n > n^a$, kde $a > 1$

(c) (Bernoulli) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -1$

(d*) (lepší Bernoulli) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $x \geq -2$

(e) (A ještě jeden Bernoulli) $(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou buď všechna nezáporná nebo nekladná větší než -1.

(f*) Lze, podobně jako v příkladu (d*) vylepšit předpoklady u předchozí nerovnosti?

(g) $n^{n+1} > (n + 1)^n$

Odhady faktoriálu

Určete, pro která přirozená čísla n platí následující nerovnosti. Dokažte matematickou indukcí.

(a) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ (Využijte Bernoulliovu nerovnost.)

(b) $n! > n^{\frac{n}{2}}$

(c*) $e\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq en\frac{n^n}{e^n}$

Dva příklady mimo indukci.

(d*) Zkuste vzorce (a),(b) odvodit také přímo.

(e**) *Jen pro ty z vás, kdo umí trochu integrovat. Zkuste dokázat odhad (c) také přímo tak, že budete integrovat funkci* $\ln x$ *na uzavřeném intervalu* $[1, n]$ *a tento integrál odhadnete zespodu/seshora tak, že křivku logaritmu vyplníte/obalíte obdélníky o šířce 1.*

Pokud místo obdélníku vyplňujete lichoběžníky, můžete zlepšit horní odhad na první z nerovností níže. Pokud obalujete lichoběžníky tak, že se dotýkají uprostřed každého intervalu, vylepšíte i dolní odhad na druhou z nerovností[1]

$$e\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n} \;\geq\; n! \;\geq\; (2e/3)^{3/2}\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}.$$

Jiné odhady

Určete, pro která přirozená čísla n *platí následující nerovnosti. Dokažte matematickou indukcí.*

(a) $|\sin(\sum_{k=1}^n x_k)| \leq \sum_{k=1}^n \sin x_k,\ x_k \in [0, \pi]$

(b) $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n$

(c) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

(d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

(f) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n+1}$

(g) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} < 2\sqrt{n}$

4. Geometrie

(a) Matematickou indukcí dokažte, že v konvexním n-úhelníku existuje právě $n(n-3)/2$ úhlopříček.

(b) Platí, že n body v rovině je určeno celkem $n(n-1)/2$ přímek? Pokud ne, určete dodatečnou podmínku, kdy tvrzení bude platit a dokažte jej matematickou indukcí.

(*c) Kolik rovin je určeno n body v prostoru? Dokažte indukcí.

(d) Dokažte, že n různých přímek v rovině procházejících jedním společným bodem rozdělí rovinu na $2n$ částí.

(e) Dokažte, že n různých přímek, z nichž žádné tři neprochází společným bodem, rozdělí rovinu na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ částí.

5. MiXmAx

1. Rozhodněte, zda platí následující identita:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)^2.$$

Návod: Prohlédněte si dříve dokazované identity.

2. Je-li $K \subset \mathbb{N}$ libovolná neprázdná podmnožina přirozených čísel, potom existuje $a \in K$ tak, že $a \leq x$ pro každé $x \in K$ a rovnost nastává pouze pro $x = a$. (Ekvivalentně: každá neprázdná podmnožina přirozených čísel má nejmenší prvek.) Dokažte.[2]

Návod: Uvažte množinu $L = \{l \in \mathbb{N} \ :\ l \leq k\ \forall k \in K\}$*. Ukažte, že* L *je neprázdná. Indukcí ukažte, že pokud* $K \subset \mathbb{N}$ *nemá nejmenší prvek, pak* $L = \mathbb{N}$*.*

3. Dokažte AG nerovnost, tzn. pro libovolná kladná $a_1, \ldots, a_n$ dokažte, že

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

---

[1]) Tento odhad už je velmi přesný. Stirlingova formule říká, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 \overset{tzn}{\iff} n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

[2]) O této vlastnosti množiny přirozených čísel se říká, že množina přirozených čísel je *dobře uspořádaná*. Třeba o reálných číslech to neplatí, uvažte např. otevřený interval $(0, 1)$.

Návod: Dokažte nejprve pro $n = 2$, posléze z platnosti pro n odvoďte nerovnost pro $2n$. Nakonec ukažte, že pokud nerovnost platí pro n, pak platí též pro $n-1$. (Takovému postupu se říká zpětná indukce.)

4. Dokažte, že každé přirozené číslo je součinem prvočísel.

Návod: Zde vám obyčejné schéma indukce stačit nebude a budete muset použít tzv. ***úplnou indukci****. Její první krok je stejný, tvrzení se dokáže pro vhodné přirozené číslo. Druhý krok se však modifikuje takto: pro důkaz, že tvrzení platí pro $n+1$ využijeme předpoklad, že tvrzení neplatí pouze pro n, ale pro* ***všechna*** *přirozená čísla (vhodným počínaje), která jsou menší než n.*

Například: tvrzení dokážeme pro $n = 1$. Z toho, že tvrzení platí pro $n = 1$, je dokážeme pro $n = 2$. Nyní přijde změna: z toho, že tvrzení platí pro $n = 1, 2$ (!) dokážeme, že platí pro $n = 3$. Atd. až z toho, že tvrzení platí pro $1, 2, 3, \dots, n$ je dokážeme pro $n + 1$.

Odůvodněte si sami oprávněnost tohoto postupu (viz následující příklad).

5. Dokažte správnost schematu úplné indukce (klasickou) matematickou indukcí.

6. *Fibonacciho posloupnost* čísel je definována rekurzivně vztahy

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1, \quad F(m) = F(m-1) + F(m-2) \text{ pro } m \geq 2 \text{ přirozené.}$$

Dokažte Binetův vzorec pro n-tý člen využívající *zlatého zlomku* φ:

$$F(n) = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{kde } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Návod: Ukažte, že φ a $(1-\varphi)$ jsou řešení rovnice $x^2 - x - 1 = 0$. Pomocí toho ukažte, že pro $y = \varphi, 1-\varphi$ je splněna identita $y^{n+1} = y^n + y^{n-1}$. Posléze definujte $F_{a,b}(n) = a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$ a ukažte, že splňují Fibonacciho rekurenční vztah. Posléze volte a, b tak, aby $F_{a,b}(0) = 0$ a $F_{a,b}(1) = 1$. Nakonec užijte (úplnou) indukci.

7. Umíte-li derivovat jednoduché výrazy, zkuste pomocí matematické indukce dokázat odhad

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \qquad \text{pro } x \geq 0.$$

Návod: Nejprve dokažte, že $f(x) = e^x - 1 - x$ je rostoucí na $(0, \infty)$ a z rovnosti $f(0) = 0$ vyvoďte, že $e^x \geq 1 + x$ pro $x \geq 0$. Posléze předpokládejte, že máte odhad dokázaný do n-tého řádu. Položte $g(x) = e^x - 1 - x - \dots - \frac{x^{n+1}}{n!}$, zderivujte a použijte indukční krok.

8. Uvažte vztah $s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(j+1)!}$. Spočítejte s_1, s_2, s_3, s_4 a na základě tohoto odhadněte vzorec pro s_n, který následně dokažte matematickou indukcí.

Návodu jistě netřeba, tak si jen všimněte, že čitatel vychází o jedničku menší než jmenovatel. Postup v tomto příkladu použitý – uhodneme řešení a dokážeme, že správně – je v matematice používaný až příliš často.