Řešení.

1. úloha

(a) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{\ln x}{|x^2-4|}}$.

Postupujeme „z vnějšku dovnitř".

i) Funkce $\arctan$ je definována na $\mathbb{R} \implies$ výraz $\sqrt{\frac{\ln x}{|x^2-4|}}$ musí být definován (a musí to být reálné číslo).

ii) Druhá odmocnina je definována, pokud je uvnitř nezáporné číslo $\implies$ máme podmínku $\frac{\ln x}{|x^2-4|} \geq 0$. Zlomek je nezáporný, pokud:

• čitatel je větší nebo roven nule a jmenovatel je kladný (viz další bod iii)),

• čitatel je menší nebo roven nule a jmenovatel je záporný. Tato možnost ale nemůže nastat, absolutní hodnota je vždy nezáporná.

iii) Jmenovatel $|x^2 - 4|$ je kladný, kdykoli $x^2 - 4 \neq 0$, tj. kdykoli $x \neq \pm 2$. Pro $x = \pm 2$ výraz zlomek $\frac{\ln x}{|x^2-4|}$ není definován (dělí se nulou).

Zároveň musí být čitatel větší nebo roven nule, tj. $\ln x \geq 0$. To je vždy, kdy $x \geq 1$.

Závěr: Máme tedy podmínky $x \geq 1$ a $x \neq \pm 2$. Z toho vychází, že $D_f = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

(b) $f(x) = \arccos|x - 2|$.

Funkce $\arccos$ je definována na intervalu $[-1, 1]$, tedy máme dvě podmínky:

• $|x - 2| \geq -1$, která je triviálně splněna vždy,

• $|x - 2| \leq 1$, která je splněna pro $x \in [1, 3]$.

Závěr: $D_f = [1, 3]$**.**

(c) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$.

Postupujme znovu „z vnějšku dovnitř".

i) $\ln$ je definován, pokud má jako argument kladné číslo, tedy máme podmínku $\ln(\ln x) > 0$.

ii) Logaritmus je kladný, pokud má jako argument číslo větší než 1. Tedy $\ln x > 1$.

iii) Konečně $\ln x > 1$ řešíme odlogaritmováním. Logaritmus $\ln$ má jako základ Eulerovo číslo, tedy

$$\ln x > 1$$

$$x > e^1$$

$$x > e$$

Závěr: $D_f = (e, +\infty)$**.**

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\max\{0; |x^2 + 4x + 2| - 2\}}$.

i) Zlomek je definován, není-li v jeho jmenovateli nula. Máme tedy podmínku

$$\max\{0; |x^2 + 4x + 2| - 2\} \neq 0.$$

ii) Maximum z nuly a jiného čísla není nulové tehdy, pokud druhé číslo je větší než nula. Toto tedy vede na podmínku

$$|x^2 + 4x + 2| - 2 > 0,$$

$$|x^2 + 4x + 2| > 2.$$

Poslední nerovnost je pravdivá, pokud

$$x^2 + 4x + 2 > 2 \qquad \text{nebo} \qquad x^2 + 4x + 2 < -2,$$

tedy

$$x^2 + 4x > 0 \qquad \text{nebo} \qquad x^2 + 4x + 4 < 0,$$

$$x(x+4) > 0 \qquad \text{nebo} \qquad (x+2)^2 < 0.$$

První nerovnice je splněna pro $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$, druhá není splněna nikdy. Protože stačí, aby byla splněna jedna z nich, je $D_f = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.
Závěr: $D_f = (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$**.**

(e) $f(x) = \ln(x - \lfloor x \rfloor)$.

Logaritmus je definován, pokud je uvnitř kladné číslo. Protože rozdíl čísla a jeho dolní celé části je vždy nezáporný a nulový pouze tehdy, je-li x celé číslo, je $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Závěr: $D_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$**.**

2. úloha

Protože v obrázku žádnou periodu nevidíme, nejmenší perioda může být délka intervalu $(-1, 3]$, na němž už je funkce definovaná, tedy 4.
Aby funkce byla periodická s periodou čtyři, naopak stačí, abychom dodrželi pravidlo, že

$$f(x) = f(x-4) \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}.$$

Tímto předpisem je vlastně hotovo. Uvědomme si přitom, že nemusíme (spojitě) navazovat ani na levém, ani na pravém konci.
Naznačme, jak tedy funkce opravdu vypadá. Podle pravidla výše se tedy posuňme o jednu periodu doprava, tj. na interval $(3, 7]$. Poblíž bodu $x = 3$ zprava pak funkce musí vypadat **zcela stejně** jako u bodu $x = -1$ zprava, tedy začít bílým kolečkem v úrovni vodorovné osy, poté pokračovat půlobloučkem s vrcholem v jedničce pro $x = 4$ a zpět do nuly v $x = 5$ a následně úsečkou od $x = 5$ do $x = 7$, kdy jdeme na svislé ose od nuly do dvou. Podobně pokračujeme dále doprava i doleva. Viz obrázek.

3. úloha

(a) Nemůže, leda by její definiční obor byl jednobodový $D_f = \{0\}$. Jinak pro $x \in D_f$, $x \neq 0$ jsou x a $-x$ dva různé body. Pokud by funkce měla být prostá, musí být $f(x) \neq f(-x)$, což je ve sporu s podmínkou sudosti.

(b) Není, protipříkadem je například každá konstantní funkce nebo funkce signum. Za protipříklad slouží libovolná funkce, která není prostá na intervalu $[0, +\infty)$ a je dodefinována jako lichá vlastností $f(-x) = -f(x)$.

4. úloha

(a) $\pi/2 + \sin x$: jde o graf č. 2. Je periodická s periodou 2π, není lichá ani sudá, je rostoucí na $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ pro libovolné k celé a klesající na zbylých intervalech.

(b) $\cos(x + \pi/2)$: jde o graf č. 5. Je periodická s periodou 2π, je lichá, není sudá, je rostoucí na $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$ pro libovolné k celé a klesající na zbylých intervalech.

(c) $\operatorname{tg} x$: jde o graf č. 4. Je periodická s periodou π, je lichá, není sudá, je rostoucí na $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ pro libovolné k celé (pozor, ne však na sjednocení libovolných dvou z nich či celé reálné ose).

(d) $-\operatorname{cotg} x$: jde o graf č. 6. Je periodická s periodou π, je lichá, není sudá, je rostoucí na $(-\pi + k\pi, 0 + k\pi)$ pro libovolné k celé (pozor, ne však na sjednocení libovolných dvou z nich či celé reálné ose).

(e) $\ln(x+1)$: jde o graf č. 1. Není periodická, není lichá, není sudá, je rostoucí na svém definičním oboru $(-1, +\infty)$.

(f) $e^{|x|}$: jde o graf č. 3. Není periodická, není lichá, je sudá, je klesající na $(-\infty, 0]$ a rostoucí na $[0, +\infty)$.

(g) 0: jde o graf č. 7. Je periodická s libovolnou periodou, je lichá, je sudá, je neklesající a zároveň nerostoucí na $\mathbb{R}$, není rostoucí ani klesající.

5. úloha

(a) Funkce je lineární, bude mít tedy předpis $y = ax + b$. Prochází bodem $[0, 3]$, po dosazení tedy máme, že

$$3 = a \cdot 0 + b,$$

tedy $b = 3$. Zároveň prochází bodem $[1, 5; 0]$, máme tedy rovnici

$$0 = 1,5a + 3$$

$$1,5a = -3$$

$$a = -2$$

Závěr: $y = -2x + 3$**.**

(b) Funkce je posunutou nepřímou úměrností. Takové odpovídá vždy předpis $y = \frac{1}{x-A} + B$, kde:

• číslo A určíme podle svislé osy. Zde je to přímka (procházející bodem) $x = +2$, tedy $A = +2$;

• číslo B určíme podle vodorovné osy. Zde je to přímka (procházející bodem) $y = -1$, tedy $B = -1$.

Závěr: $y = \frac{1}{x-2} - 1$**.**

(c) Funkce je parabolou s posunutým vrcholem $[A, B]$. Takové odpovídá předpis $y = (x - A)^2 + B$. Zde má vrchol souřadnice $[-1, -1]$, čemuž odpovídá předpis $y = (x - (-1))^2 - 1 = (x + 1)^2 - 1$.

Závěr: $y = (x + 1)^2 - 1$**.**

6. úloha

(a) Máme dokázat, že $f \circ g$ je klesající. Tedy pokud $x > y$ z def. oboru $f \circ g$, pak $f(g(x)) < f(g(y))$.

Buď tedy $x > y$. Víme, že g je klesající. Z toho plyne, že $g(x) < g(y)$.

Pak víme, že f je rostoucí. A protože $g(y) > g(x)$, je také $f(g(x)) > f(g(y))$, což jsme chtěli dokázat.

(b) Máme dokázat, že $f \circ g$ je omezená. Tedy že existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(g(x))| \leq M$ pro každé x z definičního oboru $f \circ g$.

Víme, ale, že f je omezená. Tedy existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $|f(y)| \leq M$ pro každé y z definičního oboru f. Jestliže ale x je z definičního oboru $f \circ g$, pak $g(x)$ patří do definičního oboru f. Můžeme tak položit $y = g(x)$ a z toho vyplývá, že $|f(g(x))| \leq M$, což jsme chtěli ukázat.

(c) Máme dokázat, že $f \circ g$ je sudá, je-li f lichá a g sudá. To znamená dokázat, že pokud x náleží do definičního oboru $f \circ g$, pak také $-x$ náleží do definičního oboru $f \circ g$ a platí $f(g(-x)) = f(g(x))$.

Nechť tedy x náleží do definičního oboru $f \circ g$. Potom také náleží do definičního oboru g. Protože je g sudá, náleží také $-x$ do definičního oboru g a platí, že $g(-x) = g(x)$. Tedy $g(-x)$ a $g(x)$ je tentýž prvek. Přitom jsme předpokládali, že x náleží do definičního oboru $f \circ g$. To znamená, že $g(x)$ náleží do definičního oboru f. Protože $g(-x)$ je tentýž prvek, také $g(-x)$ náleží do definičního oboru f a nutně $f(g(-x)) = f(g(x))$, neboť zobrazení nemůže stejnému prvku přiřadit dva různé obrazy. Konečně fakt, že $g(-x)$ náleží do definičního oboru f neznamená nic jiného, než že $f(g(-x))$ je definováno, a to znamená totéž, jako že $-x$ náleží do definičního oboru funkce $f \circ g$. Tím je splněno vše, co jsme chtěli dokázat.

7. úloha