Důkazy matematickou indukcí

Schéma důkazu matematickou indukcí.

Nechť $V(n)$ je výrok (tvrzení) o přirozených číslech, které máme dokázat pro všechna[1] přirozená čísla. Důkaz matematickou indukcí postupuje takto:

(i) Tvrzení dokážeme pro $n = 1$ [2])

(ii) Předpokládáme, že tvrzení platí pevně zvolené $n = k$. Z tohoto *indukčního předpokladu* dokážeme, že platí i pro $n = k + 1$.

V zásadě to znamená „postup po schodech“: Ukážeme, že tvrzení platí pro jedničku. Z toho, že platí pro jedničku plyne, že platí pro dvojku. Z toho, že platí pro dvojku, plyne, že platí pro trojku... atd.

Příklad. *Dokažte, že pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *platí rovnost*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Řešení: Pro ty, kteří nemají rádi znak $\sum$ rovnost nejprve rozepíšeme na jiný tvar

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Nyní budeme postupovat podle schématu důkazu matematickou indukcí.

1. krok: *Ověříme, že rovnost platí pro* $n = 1$. To je velmi jednoduché, neboť levá strana je rovna jedné (viz níže)

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n \overset{n=1}{=} 1 \tag{$*$}$$

a pravá strana taktéž

$$\frac{n(n+1)}{2} \overset{n=1}{=} \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

2. krok: *Za předpokladu, že tvrzení platí pro pevně zvolené přirozené číslo* $n = k$, *dokážeme, že platí i pro* $k + 1$.

Předpokládáme tedy, že platí rovnost, která vznikne, když do vztahu $(*)$ dosadíme $n = k$.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \tag{indukční předpoklad}$$

Chceme dokázat, že platí rovnost

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \tag{chceme dokázat}$$

Zkusíme tedy upravit levou stranu tak, aby se rovnala pravé. Přitom můžeme kromě jiného použít také indukční předpoklad. Zde ho lze použít (dosadit) ihned.

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + k}_{\text{podle indukčního předpokladu}} + (k+1) = \underbrace{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) =$$

To, co nám vyšlo, upravíme.

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Což jsme chtěli dokázat. $\square$

[1]) či skoro všechna, tzn. od nějakého počínaje dále

[2]) nebo jiné vhodné přirozené číslo – viz předchozí poznámku