10. Newtonův integrál

Definice. Nechť $-\infty \le a < b \le +\infty$ a nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body a, b. Říkáme, že F je **zobecněnou primitivní funkcí funkce f v intervalu I**, je-li funkce F *spojitá* v I a platí-li rovnost $F' = f$ všude v $I - K$, kde $K \subset I$ je nějaká konečná množina. Slova „zobecněná primitivní funkce" budeme často zkracovat na „z.p.f.", množinu všech z.p.f. funkce f v intervalu I budeme značit $\mathrm{ZPF}(f;\, I)$.

Poznámka 10.1. Všimněme si, že funkce f může mít v intervalu I z.p.f., *aniž je všude v I definována*; stačí, aby byla definována *všude v I až na jistou konečnou množinu*. Všimněme si dále, že na rozdíl od primitivní funkce mluvíme o z.p.f. v libovolných (nejen tedy v otevřených) intervalech. [1] □

Je zřejmé, že

$$F \in \mathrm{ZPF}(f;\, I),\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow F + c \in \mathrm{ZPF}(f;\, I). \tag{1}$$

Důležité však je, že platí i obrácené tvrzení:

Věta 10.1. *Je-li $F \in \mathrm{ZPF}(f;\, I)$ a $G \in \mathrm{ZPF}(f;\, I)$, existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $G = F + c$.*

V důsledku toho platí:

(2) *Má-li f v (a,b) primitivní funkci, je* $\mathrm{ZPF}(f;\, (a,b)) = \mathrm{PF}(f; a, b)$.

Věta 10.2. (Základní existenční věta.) *Je-li funkce f spojitá a omezená v omezeném intervalu (a,b), je $\mathrm{ZPF}(f;\, \langle a,b\rangle) \ne \emptyset$ a každá z.p.f. funkce f v $\langle a,b\rangle$ je primitivní funkcí funkce f v (a,b).*

Příklad 10.1. A. Protože funkce $|x|$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a protože rovnost $|x|' = \operatorname{sgn} x$ platí pro všechna $x \ne 0$, je $|x|$ z.p.f. funkce $\operatorname{sgn} x$ v $\mathbb{R}$.

B. Protože je $\lg|x| = x(\lg|x| - 1)'$ pro všechna $x \ne 0$ a $\lim_{x\to 0} x(\lg|x| - 1) = 0$, je funkce

$$F(x) := \begin{Bmatrix} x(\lg|x| - 1) & \text{pro } x \ne 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

z.p.f. funkce $\lg|x|$ v $\mathbb{R}$.

C. Funkce $f(x) := \operatorname{sgn}(\cos x)$ nemá žádnou z.p.f. v $\mathbb{R}$ (obecněji: v žádném neomezeném intervalu), funkce $F(x) := \arcsin(\sin x)$ je však její z.p.f. v každém omezeném intervalu. [2]

---

[1] V obou případech je právě takto zavedená terminologie výhodná všude tam, kde s pojmem primitivní resp. zobecněné primitivní funkce pracujeme.

[2] To je samozřejmě důsledek definice, v níž se připouští pouze konečný počet výjimečných bodů, v nichž rovnost $F' = f$ neplatí. Definici z.p.f. by však bylo možné zobecnit tak, aby funkce F z příkladu 10.1C byla (podle obecnější definice) z.p.f. funkce f v celém $\mathbb{R}$. Dáváme však přednost vyslovené definici, protože je jednoduchá a protože s ní v dalším vystačíme.

4. Konvergence určitého integrálu

Budeme se zabývat následující úlohou. Nechť funkce f je spojitá na otevřeném intervalu (a,b) (omezeném či neomezeném). Existuje integrál $\int_a^b f$ (zobecněný Riemannův či Newtonův – kteréžto dva pojmy pro takové funkce splývají)? V případě, že $\int_a^b f$ existuje (tj. je roven nějakému reálnému číslu), řekneme, že integrál konverguje. V opačném případě řekneme, že diverguje. Pokud konverguje integrál $\int_a^b |f|$, řekneme, že $\int_a^b f$ konverguje absolutně. Pokud integrál konverguje, ale nikoli absolutně, říkáme, že konverguje neabsolutně. Budeme se držet této terminologie spíše než pojmů „existuje" a „neexistuje", protože tyto pojmy mají u jiných integrálů (např. Lebesgueova) jiný význam. Porovnejte pojmy divergence, konvergence a absolutní konvergence s analogickými pojmy pro řady.

§20. První metodou je použití věty, která říká, že *je-li f funkce* **spojitá na uzavřeném intervalu** $[a,b]$, *pak $\int_a^b f$ konverguje* (viz např. §10).

<u>Příklad</u> Integrál $\int_7^{50} \operatorname{arctg}(x^5+16)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože integrovaná funkce je spojitá na intervalu $[7,50]$.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože funkce

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

je spojitá na $[0,1]$. Zde využíváme toho, že integrál z funkce f od a do b závisí jen na hodnotách f na (a,b) a ne na tom, zda a případně jak je f definována v krajních bodech. Můžeme-li ji tam však dodefinovat spojitě, pak lze použít výše uvedenou větu.

§21. Další možností je **výpočet určitého integrálu** s využitím primitivní funkce dle §11. Z výpočtů v §11 plyne tvrzení v následujícím příkladu.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha>-1$.

Výpočet druhého příkladu je zcela analogický, a tak ho necháváme na čtenáři.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_1^{+\infty} x^\alpha\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když $\alpha<-1$.

Uvedené dva příklady jsou užitečné pro vyšetřování konvergence mnoha jiných integrálů, jak uvidíme později.

<u>Příklad</u> Integrál $\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x$ konverguje, protože

$$\int_0^1 \log x\,\mathrm{d}x = [x\log x]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = -1.$$

§22. **Integrál součtu.** Občas se hodí následující jednoduché pozorování.

Nechť f, g jsou spojité na (a, b) a $\int_a^b g$ konverguje. Pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b (f + g)$.

P ř í k l a d Konverguje integrál $\int_0^1 \frac{1-\sin x}{x}\, dx$?

Řešení. Integrál $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ konverguje (viz §20), zatímco $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ diverguje dle příkladu v předchozím paragrafu. Proto podle uvedeného tvrzení náš integrál diverguje. ■

Další, méně triviální, případy použití pozorování z tohoto paragrafu v kombinaci s jinými kritérii jsou uvedeny dále.

§23. **Bolzano-Cauchyova podmínka.** Následující věta dává nutnou a postačující podmínku pro konvergenci integrálu. Je přeformulací Bolzano-Cauchyovy podmínky pro existenci vlastní limity primitivní funkce.

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b)$. Pak integrál $\int_a^b f$ konverguje, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $b' \in (a, b)$ takové, že pro každé dva body x_1, x_2 splňující $b' < x_1 < x_2 < b$ platí $|\int_{x_1}^{x_2} f| < \varepsilon$. Analogické tvrzení platí pro interval typu $(a, b]$.

P ř í k l a d Je-li $\alpha \geq 0$, integrál $\int_1^\infty x^\alpha \sin x\, dx$ diverguje.

Řešení. Použijeme Bolzano-Cauchyovu podmínku. Je-li $k \geq 1$ celé číslo, platí

$$\left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^\alpha \sin x\, dx \right| \geq (k\pi)^\alpha \int_0^\pi \sin x\, dx = 2(k\pi)^\alpha \geq 2\pi^\alpha.$$

Zvolme nyní $\varepsilon = \pi^\alpha$. Pro každé $b' < \infty$ existuje $k \geq 1$ celé tak, že $k\pi > b'$. Položme $x_1 = k\pi$ a $x_2 = (k+1)\pi$. Pak dle uvedeného výpočtu je $\left|\int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \sin x\, dx\right| > \varepsilon$. Integrál proto diverguje. ■

§24. **Srovnávací kritérium** je obsaženo v následující větě.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu (a, b) a pro každé $x \in (a, b)$ platí $|f(x)| \leq g(x)$. Pokud $\int_a^b g$ konverguje, pak $\int_a^b f$ konverguje též. (A tedy, diverguje-li $\int_a^b f$, diverguje i $\int_a^b g$.)

Důsledkem je následující tvrzení.

Nechť f je funkce spojitá na (a, b). Pokud $\int_a^b f$ konverguje absolutně, pak i konverguje.

P ř í k l a d Pokud $\alpha > 1$, pak $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ konverguje (dokonce absolutně).

Proto $\int_2^\infty \frac{-2\sin^2 x}{x(x+2\sin x)}\,dx$ konverguje, a tudíž i integrál ze zadání konverguje. ■

<u>Příklad</u> Zjistěte, zda konverguje integrál $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x}\,dx$.

Řešení. Postupujme podobně jako v předchozím příkladu s využitím faktu, že $\int_4^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ konverguje. Jest $\frac{\sin x}{\sqrt{x}+2\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{-2\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}$, konvergence integrálu ze zadání je tedy ekvivalentní konvergenci $\int_4^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)}\,dx$. S ohledem na předminulý příklad lze odhadnout, že tento integrál bude divergovat. Pokusme se to dokázat. Platí

$$\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2\sin x)} \ge \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}.$$

Protože $\int_4^\infty \frac{\cos 2x}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}\,dx$ konverguje podle Dirichletova kritéria, stačí ukázat, že integrál $\int_4^\infty \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ diverguje. To plyne z limitního srovnávacího kritéria, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$ a $\int_4^\infty \frac{dx}{x}$ diverguje. Tak jsme ukázali, že integrál ze zadání diverguje. ■

Předchozí příklad svědčí o tom, že Dirichletovo kritérium by neplatilo, kdybychom v něm vynechali předpoklad monotonie funkce g. Předminulý příklad naproti tomu ukazuje, že absence monotonie nezaručí divergenci.

§28. Spolu s Dirichletovým kritériem se obvykle uvádí **Abelovo kritérium**. Uvádíme ho zde zvlášť, protože na rozdíl od Dirichletova kritéria má i symetrickou verzi.

Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a,b)$, funkce g nechť je na tomto intervalu monotónní a omezená.

(i) Jestliže konverguje $\int_a^b f$, konverguje i integrál $\int_a^b fg$.

(ii) Pokud navíc $\lim\limits_{x\to b-} g(x) \neq 0$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje integrál $\int_a^b fg$.

Analogické tvrzení platí pro intervaly typu $(a,b]$.

<u>Příklad</u> Zjistěte, pro které hodnoty parametrů konverguje, případně absolutně konverguje, $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot \operatorname{arctg}^\beta x \cdot \frac{x^2}{x^2+1}\cdot \cos\frac{1}{x}\cdot x^\gamma\,dx$.

Řešení. Nejprve si úlohu zjednodušíme podle symetrické verze Abelova kritéria. Všechny činitele v integrandu jsou spojité funkce na $[1,\infty)$. Funkce $\cos(1/x)$ je na $[1,\infty)$ rostoucí a v ∞ má limitu 1. A tedy konvergence (absolutní konvergence) integrálu ze zadání je ekvivalentní konvergenci (absolutní konvergenci) integrálu $\int_1^\infty \sin(x^\alpha)\cdot\operatorname{arctg}^\beta x\cdot\frac{x^2}{x^2+1}\cdot x^\gamma\,dx$. To plyne z Abelova kritéria. Dále funkce $\operatorname{arctg}^\beta x$ je monotónní (rostoucí pro $\beta > 0$, klesající pro $\beta < 0$, konstantní pro $\beta = 0$) a má v ∞ vlastní nenulovou limitu $(\pi/2)^\beta$. Funkce $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ je rostoucí a má limitu 1. Dvojí použití Abelova kritéria dává, že konvergence (absolutní konver-