1 Newtonův integrál

Definice 1. Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Řekneme, že *funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál*, případně že *Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) existuje*, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci F,
- existují limity $\lim_{x \to a_+} F(x)$ a $\lim_{x \to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny R^*.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) nazýváme prvek množiny R^* určený výrazem

$$\lim_{x \to b_-} F(x) - \lim_{x \to a_+} F(x).$$

Tuto hodnotu pak značíme symbolem $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Pokud $a > b$, položíme $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. Jestliže $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že Newtonův integrál z funkce f na intervalu (a, b) *konverguje*, v opačném případě říkáme, že *diverguje*.

Poznámka 2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 3 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.**

(i) Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$, a nechť $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a, b)$, $\alpha f \in \mathcal{N}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\ dx,$$
$$\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(ii) Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$, a nechť $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$. Nechť platí $f(x) \leq g(x)$, $x \in (a, b)$. Pak $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(iii) Nechť $a, b \in R^*$, $a < b$, nechť $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a nechť f je spojitá na (a, b). Pak $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ existuje a $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

(iv) Nechť $a, c \in R^*$, $a < c$, a nechť $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, c)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a platí

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

(v) Nechť $a, c \in R^*$, $a < c$, a nechť $b \in (a, c)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ a f je spojitá v b, pak $f \in \mathcal{N}(a, c)$ a platí (1).

Věta 4 (o newtonovské integrovatelnosti omezené spojité funkce na omezeném intervalu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a nechť f je omezená spojitá funkce na (a, b). Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 5 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $|f(x)| \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 6 (limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $-\infty < a < b \leq \infty$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité a nechť g je kladná na $[a, b)$.

1. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a $\int_a^b g$ konverguje, pak také $\int_a^b f$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je vlastní a nenulová, pak $\int_a^b f$ konverguje právě tehdy, když $\int_a^b g$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)}$ je nevlastní a $\int_a^b g$ diverguje, pak také $\int_a^b f$ diverguje.

Věta 7 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu II)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 8 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu II)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Věta 9 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konveregnce Newtonova integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in R^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na (a, b). Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ <u>monotónní</u> a spojitá. Pak platí:

(A) Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

(D) Je-li F omezená na (a, b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.