9 Konvergence Newtonova integrálu - Výsledky

Výsledky úlohy 1.

a) K pro $a > -1$
D pro $a \leq -1$

b) K pro $a < -1$
D pro $a \geq -1$

c) D pro $a, b \in \mathbb{R}$

d) K pro $a < -1$
D pro a $a \geq -1$

e) K pro $a > -1$
D pro $a \leq -1$

f) K pro $a < -1$
D pro a $a \geq -1$

g) K pro $a > -1,\ b \in \mathbb{R}$
K pro $a = -1,\ b < -1$
D pro $a = -1,\ b \geq -1$
D pro $a < -1,\ b \in \mathbb{R}$

h) K pro $b < 0,\ a \in \mathbb{R}$
K pro $b = 0,\ a < -1$
D pro $b = 0,\ a \geq -1$
D pro $b > 0,\ a \in \mathbb{R}$

i) K pro $-1 < a < 1$
D pro $a \leq -1$
D pro $a \geq 1$

Výsledky úlohy 2. a) K; b) K; c) K; d) D; e) K; f) K; g) K; h) K; i) D; k) K;

j) K pro $p < 2$
D pro $p \geq 2$

l) K pro $p > 3$
D pro $p \leq 3$

m) K pro $2 < p < 4$
D pro $p \leq 2$
D pro $p \geq 4$

n) K pro $p = 0,\ n \in \mathbb{N}$
D pro $p \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$

o) K pro $p > -1,\ q > -1$
D pro $p \leq -1,\ q \in \mathbb{R}$
D pro $p \in \mathbb{R},\ q \leq -1$

Výsledky úlohy 3. c) D; d) NAK; e) NAK; f) NAK; g) D; h) NAK;

a) NAK pro $0 < \alpha \leq 1$
AK pro $1 < \alpha < 2$
D pro $\alpha \leq 0$ nebo $\alpha \geq 2$

b) NAK pro $0 < \alpha < 1$
D pro $\alpha \leq 0$ nebo $\alpha \geq 1$

i) NAK pro $-1 \leq \alpha < 0$
AK pro $-2 < \alpha < -1$
D pro $\alpha \leq -2$ nebo $\alpha \geq 0$

j) NAK pro $1 \leq \alpha < 2$
AK pro $\alpha < 1$
D pro $\alpha \geq 2$

k) NAK pro $-2 < \alpha \leq -1$
AK pro $\alpha > -1$
D pro $\alpha \leq -2$

l) NAK pro $1 \leq \alpha < 2$
AK pro $\alpha < 1$
D pro $\alpha \geq 2$

m) NAK pro $-2 < \alpha \leq -1$
AK pro $-1 < \alpha < 1$
D pro $\alpha \leq -2$ nebo $\alpha \geq 1$

n) NAK pro $-3 < \alpha \leq 2$
AK pro $\alpha > -2$
D pro $\alpha \leq -3$

o) NAK pro $-1 < \alpha \leq 0$
AK pro $\alpha > 0$
D pro $\alpha \leq -1$

Ve výsledcích v PDF je k dispozici naskenovaný rukopis řešení všech úloh. Snažil jsem se být dostatečně podrobný, aby bylo vidět, jaké ideje se skrývají za uvedenými postupy. V řešení často nejsou explicitně ověřeny veškeré předpoklady použitých vět, jejich doplnění a ověření je ponecháno laskavému čtenáři jakožto cvičení.

ÚLOHA 1

a) $$\int_0^1 x^a\,dx = \begin{cases} \overset{a=-1}{} \left[\ln x\right]_0^1 = 0-(-\infty) = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \overset{a\neq -1}{} \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = \begin{cases} \overset{a>-1}{} \frac{1}{a+1} - \frac{0}{a+1} = \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a<-1}{} \frac{1}{a+1} - \frac{\infty}{a+1} = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha\in\mathbb{R}^+} x^a\,dx \begin{cases} \text{KONV. pro } a>-1 \\ \text{DIV. pro } a\leq -1 \end{cases}$$

---

b) $$\int_1^\infty x^a\,dx = \begin{cases} \overset{a=-1}{} \left[\ln x\right]_1^\infty = +\infty - 0 = +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \overset{a>-1}{} \frac{\infty}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \infty \Rightarrow \text{DIV.} \\ \overset{a<-1}{} \frac{0}{a+1} - \frac{1}{a+1} = \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{\underset{\alpha>0}{\alpha}}^\infty x^a\,dx \begin{cases} \text{KONV. pro } a<-1 \\ \text{DIV. pro } a\geq -1 \end{cases}$$

---

c) $$\int_0^\infty x^a + x^b\,dx = \circledast$$

$$\int_0^\infty x^a\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^a\,dx}_{=:I_1} + \underbrace{\int_1^\infty x^a\,dx}_{=:I_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_1<\infty \iff a>-1 \\ I_2<\infty \iff a<-1 \end{array}\right\} \Rightarrow I_1+I_2 = +\infty \quad \forall a\in\mathbb{R}$$

$$\circledast = \int_0^\infty x^a\,dx + \int_0^\infty x^b\,dx = \underset{\forall a\in\mathbb{R}}{(+\infty)} + \underset{\forall b\in\mathbb{R}}{(+\infty)} = +\infty$$

---

d) $$\int_0^{e^{-1}} \frac{|\ln x|^a}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} |y|^a\,dy = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a<-1}{} \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a\geq -1}{} +\infty \Rightarrow \text{DIV.} \end{cases}$$

subst. $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$; $x\in(0,e^{-1}) \mapsto y\in(-\infty,-1)$; $\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(0,e^{-1})$

---

e) $$\int_1^e \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_0^1 y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a\leq -1}{} +\infty \Rightarrow \text{DIV} \\ \overset{a>-1}{} \frac{1}{a+1} \Rightarrow \text{KONV.} \end{cases}$$

$y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$; $x\in(1,e) \mapsto y\in(0,1)$; $\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

f) $$\int_e^\infty \frac{\ln^a x}{x}\,dx = \int_1^\infty y^a\,dy = \begin{cases} \overset{a<-1}{} \frac{1}{|a+1|} \Rightarrow \text{KONV.} \\ \overset{a\geq -1}{} +\infty \Rightarrow \text{DIV} \end{cases}$$

$y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$; $x\in(e,\infty) \mapsto y\in(1,\infty)$; $\frac{1}{x}\in(0,\infty)\ \forall x\in(1,e)$

---

g) $$\int_0^{e^{-1}} x^a |\ln x|^b\,dx$$

- nechť $\varepsilon>0$, pak $\lim_{x\to 0} x^\varepsilon \cdot |\ln x|^b = 0 \quad \forall b\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} x^{-\varepsilon}\cdot|\ln x|^b = +\infty \quad \forall b\in\mathbb{R}$$

Integrand $x^a|\ln x|^b$ je spojitý na $(0,e^{-1}]$, problematický bodem je jedině 0

Nejprve srovnejme s $x^{a+\varepsilon}$: $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^a|\ln x|^b}{x^{a+\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{-\varepsilon}|\ln x|^b = +\infty$.

Tedy diverguje-li $\int_0^{e^{-1}} x^{a+\varepsilon}\,dx$, pak diverguje i $\int_0^{e^{-1}} x^a|\ln x|^b\,dx$ (opačná implikace neplatí(!))

$\int_0^{e^{-1}} x^{a+\varepsilon}\,dx$ diverguje, je-li $a+\varepsilon \le -1$, tedy $a \le -1-\varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon>0$.

Proto $\int_0^{e^{-1}} x^a|\ln x|^b$ diverguje, je-li $a \le -1-\varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon>0$, tedy kdykoli $a<-1$, na hodnotě $b\in\mathbb{R}$ nezáleží.

Dále srovnejme s $x^{a-\varepsilon}$: $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{x^a|\ln x|^b}{x^{a-\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to 0+} x^{\varepsilon}|\ln x|^b = 0$

Tedy konverguje-li $\int_0^{e^{-1}} x^{a-\varepsilon}\,dx$, pak konverguje i $\int_0^{e^{-1}} x^a|\ln x|^b\,dx$ (opačná implikace neplatí(!))

$\int_0^{e^{-1}} x^{a-\varepsilon}\,dx$ konverguje, je-li $a-\varepsilon>-1$, tedy $a>-1+\varepsilon$ pro libovolné $\varepsilon>0$.

Proto $\int_0^{e^{-1}} x^a|\ln x|^b$ konverguje, je-li $a>-1+\varepsilon$ pro nějaké $\varepsilon>0$, tedy kdykoli je $a>-1$, na hodnotě $b\in\mathbb{R}$ nezáleží.

Zbývá vyšetřit případ $a=-1$ ... ten je vyřešen v ÚLOZE 1d), tedy $b<-1 \Rightarrow$ KONV.
$b\ge -1 \Rightarrow$ DIV

ZÁVĚR DISKUSE $\int_0^{e^{-1}} x^a|\ln x|^b\,dx$:

- $a>-1,\ b\in\mathbb{R} \Rightarrow$ KONV.
- $a=-1,\ b<-1 \Rightarrow$ KONV.
- $a=-1,\ b\ge -1 \Rightarrow$ DIV.
- $a<-1,\ b\in\mathbb{R} \Rightarrow$ DIV.

---

b) $\int_1^\infty x^a e^{bx}\,dx$

Integrand je spojitý na $[1,\infty) \Rightarrow$ nutno vyšetřit konvergenci v ∞.

Je-li $b>0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} x^a e^{bx} = +\infty$ (bez ohledu na hodnotu $a\in\mathbb{R}$)

Speciálně tedy ex. $x_0\ge 1$ takové, že $\forall x>x_0$: $x^a e^{bx}\ge 1$.

Proto $\int_1^\infty x^a e^{bx}\,dx = \int_1^{x_0} x^a e^{bx} + \int_{x_0}^\infty x^a e^{bx} \ge \underbrace{\int_1^{x_0} x^a e^{bx}\,dx}_{\ge 0} + \underbrace{\int_{x_0}^\infty 1\,dx}_{=\infty} = \infty \Rightarrow$ DIV

Je-li $b=0$, pak jde o $\int_1^\infty x^a \Rightarrow$ $a<-1 \Rightarrow$ KONV.
$a\ge -1 \Rightarrow$ DIV.

Je-li $b<0$, pak $\lim\limits_{x\to\infty} x^a e^{\frac{b}{2}x} = 0$ (bez ohledu na hodnotu $a\in\mathbb{R}$)

Speciálně tedy ex. $x_1\ge 1$ tak, že $\forall x>x_1$: $x^a e^{\frac{b}{2}x}\le 1$

Proto $\int_1^\infty x^a e^{bx}\,dx = \underbrace{\int_1^{x_1} x^a e^{bx}}_{=c<\infty} + \int_{x_1}^\infty \underbrace{x^a e^{\frac{b}{2}x}}_{\le 1} e^{\frac{b}{2}x} \le c + \underbrace{\int_{x_1}^\infty e^{\frac{b}{2}x}}_{<\infty} < \infty \Rightarrow$ KONV.

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^a x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^a x\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} tg^a x\, dx$

Integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, potenciálně problematické jsou oba kraje.

v 0: $tg\, x = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0}$ $\qquad tg^a x = \underbrace{\frac{\sin^a x}{x^a}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^a x}}_{\to 1} \cdot x^a$

Srovnávat tedy budeme s x^a: $\lim_{x\to 0+} \frac{tg^a x}{x^a} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^a x}{x^a} \cdot \frac{1}{\cos^a x} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1 \cdot 1 = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^a x\, dx$ KONV. $\iff \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^a\, dx$ KONV. $\iff a > -1$

v $\frac{\pi}{2}$: $tg\, x = \underbrace{\sin x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ $\qquad tg^a x = \underbrace{\sin^a x}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^a}_{\to 1} \cdot \frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}$

Taylor v $\frac{\pi}{2}$ pro $\cos x$: $\cos x = -(x-\frac{\pi}{2}) + o((x-\frac{\pi}{2})^2) = (\frac{\pi}{2}-x)\cdot(1 + o(\frac{\pi}{2}-x))$

Srovnávat tedy budeme s $\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}$: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{tg^a x}{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^a}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \sin^a x \cdot \left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^a \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1$

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} tg^a x$ KONV. $\iff \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^{-a}\, dx$ KONV. $\overset{\text{subst. } y = \frac{\pi}{2}-x}{\iff} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^{-a}\, dy$ KONV $\iff -a > -1 \iff a < 1$

ZÁVĚR: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^a x\, dx$ KONV. pro $a \in (-1, 1)$

DIV. pro $a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ÚLOHA 2

a) $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}}\, dx = 2 \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}\, dy$ $\qquad$ Integrand $y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}$ je spojitý na $(0, \infty)$.

subst. $\sqrt{x} = y$ $\qquad x \in (0,\infty) \mapsto y \in (0,\infty)$ bijekce

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dy$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{x}} \in (0,\infty)\ \forall x \in (0,\infty)$

v 0: $e^{-y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1 \Rightarrow$ srovnáme s $y^{-\frac{1}{2}}$: $\lim_{y\to 0+} \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}}{y^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{y\to 0+} e^{-y} = 1$

$\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}$ KONV. $\iff \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}} e^{-y}$ KONV., tedy v 0 integrál konverguje

v ∞: $y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \le e^{-y} \quad \forall y \ge 1$

$0 \le \int_1^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \le \int_1^\infty e^{-y} = e^{-1} < \infty \Rightarrow$ KONV, tedy v ∞ integrál rovněž konverguje

ZÁVĚR: $\int_0^\infty x^{-\frac{3}{4}} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ KONVERGUJE

b) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,1]$ ... problematický bod je jen 0

$\operatorname{tg} x = x + o(x^2) = x\cdot(1+o(x))$ ... Maclaurin 2. stupně

$\overset{\Downarrow}{\text{srovnáme}}\ \operatorname{tg} x \text{ s } x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\frac{x}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\Leftrightarrow$ $\int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx$ K $\qquad \int_0^1 \frac{x}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 < \infty \Rightarrow$ KONV.

Ú3 c) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{x+1}{x+1}\sin x - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1} = \int_0^\infty \sin x\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$

integrand je spojitý na $[0,\infty)$ ... problematické je jen ∞

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}\,dx$ konverguje dle Dirichleta: $\frac{1}{x+1} \searrow 0$ pro $x\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin x\right| = |\cos 0 - \cos M| \le 2 \quad \forall M\in(0,\infty)$

$\int_0^\infty \sin x\,dx = \lim_{x\to\infty} \cos x - \lim_{x\to 0+}\cos x$ NEEX. $\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x \sin x}{x+1}\,dx$ DIVERGUJE

Ú2 c) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(-1,1)$, problematické jsou oba kraje

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,\sqrt{1+x}\,\sqrt{1-x}} \Rightarrow \text{srovnáme s } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \text{ v } 1$$

$\qquad\qquad$ a s $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ v -1

v 1: $\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}\,dy$ KONV.

subst. $y = 1-x$

v -1: $\lim_{x\to -1+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} \overset{\text{VoAL}}{\underset{\text{VoLSF}}{=}} \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}\,dz$ KONV.

subst. $z = 1+x$

Tedy $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ KONVERGUJE

---

d) $\int_0^1 x^{\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{\ln^2 x}\,dx$ ... integrand je spoj. na $(0,1]$, problém jen v 0.

Pro $0<x<e^{-1}$ je $\ln x < -1$, tedy $x^{\ln x} > x^{-1}$ pro $0<x<e^{-1} (<1)$

$$\int_0^1 \cancel{\ln x}\, x^{\ln x}\,dx = \int_0^{e^{-1}} x^{\ln x}\,dx + \underbrace{\int_{e^{-1}}^1 x^{\ln x}\,dx}_{\in\mathbb{R}} > \int_0^{e^{-1}} x^{-1}\,dx + c = +\infty \Rightarrow \text{DIV.}$$

e) $\int_0^1 x^{-\ln x}\,dx = \int_0^1 e^{-\ln^2 x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$.

v 0: $\ln^2 x \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty \Rightarrow e^{-\ln^2 x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ ... integrand lze spojitě rozšířit na $[0,1]$, je tedy omezený $\Rightarrow$ KONV.

---

f) $\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty) \Rightarrow$ nutno vyšetřit oba krajní body

v 0: $\mathrm{arctg}\,x = x + o(x) = x\cdot(1+o(1))$ .. Maclaurin 1. stupně

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}}{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot x}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1$$

$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x}$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV. $\qquad \int_0^1 \sin\frac{1}{x}$ KONV.

$|\sin\frac{1}{x}| \le 1 \Rightarrow \int_0^1 |\sin\frac{1}{x}|\,dx \le \int_0^1 1\,dx = 1 \Rightarrow$ ABS. KONV.

v ∞: $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0_+$, $\frac{\sin y}{y} \xrightarrow[y\to 0+]{} 1$, $\mathrm{arctg}\,x \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sin\frac{1}{x}\cdot \mathrm{arctg}\,y}{x}}{\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{\pi}{2}}{x}} \underset{\text{VoLSF}}{\overset{\text{VoAL}}{=}} 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,x}{x} \text{ KONV.} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{\frac{1}{x}\frac{\pi}{2}}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{c}{x^2}\,dx \text{ KONV.}$$

Zadaný integrál tedy konverguje

---

g) $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\pi)$, v krajních bodech utíká do $-\infty$.

v 0: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 1$ ... zkusíme srovnat $\ln(\sin x)$ s $\ln x$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln\sin x}{\ln x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim \cos x\cdot\frac{x}{\sin x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1$$

$\int_0^1 \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_0^1 \ln x\,dx$ KONV. $\qquad \int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ KONV.

v π: $\frac{\sin x}{\pi - x} \xrightarrow[x\to\pi-]{} 1$ ... plyne z Taylorova rozvoje sinu v bodě π.

$$\lim_{x\to\pi-} \frac{\ln\sin x}{\ln(\pi-x)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\pi-} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\pi-x}} = \lim_{x\to\pi-} (-\cos x)\cdot\frac{\pi-x}{\sin x} \overset{\text{VoAL}}{=} 1$$

$\int_1^\pi \ln\sin x\,dx$ KONV. $\Leftrightarrow \int_1^\pi \ln(\pi-x)\,dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_0^{\pi-1} \ln y\,dy$ KONV.

subst. $y = \pi - x$

ZÁVĚR: $\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ KONVERGUJE

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}$ $\qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}$ ... integrand je spojitý na $(0, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \pi]$.

$$\left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi) \implies \left|\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}}\right| \in \mathcal{N}(0,\pi)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sin(\sec x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{N}(0,\pi).$$

---

i) $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x \ln^2(1+x)}$ ... integrand spojitý na $(0, \frac{1}{2}]$, problém v 0.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\qquad$ • $\lim_{y\to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \overset{VoLSF}{=} 1$

Srovnáme tedy $\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}}{\frac{(x^2+x^3)}{x\cdot x^2}} = \lim \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x^2+x^3} \cdot \frac{x^2}{\ln^2(1+x)} = 1$

$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}\,dx$ KONV. $\iff \int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x\cdot x^2}\,dx$ KONV.

$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x^3}{x^3}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{x} + 1\,dx = +\infty$, tedy DIV. $\implies \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x^2+x^3)}{x\cdot \ln^2(1+x)}$ DIV.

---

j) $\int_1^2 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}$ ... integrand spojitý na $(1, 2]$, problém v 1.

- $\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1 \implies \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}}{\frac{(x-1)}{(x-\sqrt{x})^p}} = \lim_{x\to 1+} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-1} = 1$

Stačí tedy vyšetřit $\int_1^2 \frac{x-1}{(x-\sqrt{x})^p}\,dx = \int_1^2 \frac{x-1}{(\sqrt{x})^p\cdot(\sqrt{x}-1)^p} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}\,dx$

Srovnání: $\lim_{x\to 1+} \frac{\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x})^p\,(\sqrt{x}-1)^p}}{(\sqrt{x}-1)^{1-p}} \underset{VoLSF}{\overset{VoAL}{=}} 2 \implies$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (\sqrt{x}-1)^{1-p}\,dx$

Taylor v 1 z $\sqrt{x}$: $\quad \sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + o(x-1) \quad \implies$ srovnání $\lim_{x\to 1+} \frac{(\sqrt{x}-1)^{1-p}}{\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^{1-p}} = 1$

$\implies$ stačí vyšetřit $\int_1^2 (x-1)^{1-p}\,dx = \int_0^1 y^{1-p}\,dy \implies 1-p > -1 \iff p < 2 \implies$ KONV.

subst. $y = x-1$, $dy = dx$ $\quad x\in(1,2) \mapsto y\in(0,1)$ $\implies 1-p \leq -1 \iff p \geq 2 \implies$ DIV.

k) $\int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x}{x\cdot\sqrt{\sin x}}$ ... integrand je spojitý na $(0,\pi)$, nemění znaménko (je záp.)

problém jak v 0, tak v π.

v 0: $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0^a \frac{\ln \sin x}{x^{3/2}}\,dx$ (volím $a := \arcsin\frac{1}{e}$)

na intervalu $(0,a)$ je $0\le \sin x < \frac{1}{e} \Rightarrow -\infty < \ln(\sin x) < -1$.

Proto $\int_0^a \frac{\ln\sin x}{x^{3/2}}\,dx \le \int_0^a \frac{-1}{x^{3/2}}\,dx = -\infty \Rightarrow$ DIV.

---

l) $\int_0^\pi \frac{\sin^p x}{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}\, dx$ ... integrand spojitý na $(0,\pi)$

• jmenovatel má kořen pouze a jenom v 0 (náš pohled je restringován na $[0,\pi]$)

$j(x) := e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$, $j(0)=1-1=0$, $j'(x) = -x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \sin x = \underbrace{x}_{>0}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}_{>0?}$ ⇒ jmenovatel by pak byl rostoucí

$$\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \underbrace{x^{2k}\left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!!}\right)}_{\searrow 0 \text{ pro } x\le 1} =: \sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$$

přičemž $|a_k|>|a_{k+1}|>|a_{k+2}|>\dots$ ⇒ o znaménku součtu rozhoduje první člen v sumě, zde tedy $(-1)^1 x^{2\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!!}\right) = \frac{x^2}{12} > 0 \Rightarrow j'(x)>0$ pro $x\le 1$

Tedy j na $(0,1)$ roste. Na $[\frac{\pi}{2},\pi]$ je zjevně kladný.

Zbývá ukázat, že i na $[1,\frac{\pi}{2}]$ je stále kladný. Spočteme, že $j'(x)>0$ i na $[1,\frac{\pi}{2}]$.

$\frac{\sin x}{x}$ je klesající fce na $[1,\frac{\pi}{2}]$ ... minima nabývá v $\frac{\pi}{2}$ ... $\min_{[1,\frac{\pi}{2}]} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi} \doteq 0{,}64$

$+e^{-\frac{x^2}{2}}$ je klesající fce na $[1,\frac{\pi}{2}]$ ... maxima nabývá v 1 ... $\max_{[1,\frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{e} \doteq 0{,}61$

$$\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{2}} \ge \min_{[1,\frac{\pi}{2}]} \frac{\sin x}{x} - \max_{[1,\frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{e} > 0. \Rightarrow j'(x)>0 \text{ na } [1,\tfrac{\pi}{2}].$$

Tedy $j=0$ v 0, pak $j(x)$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ roste, tedy se nevynuluje,
na $[\frac{\pi}{2},\pi]$ je $j(x)>0$, neboť jde o součet kladného a nezáporného čísla.

Skutečně tedy má jmenovatel na $[0,\pi]$ jediný kořen, a to nulu.

• $\lim_{x\to0+}\frac{\sin^p x}{x^p} \overset{VoLSF}{=} 1$, $\lim_{x\to 0+}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^4} = \frac{1}{12}$ (4× l'Hôpital nebo Maclaurin 4. st.)

v 0 srovnání: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^p}{x^4}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{p-4}$

- $p-4>-1$, tj. $p>3 \Rightarrow$ KONV.
- $p-4\le-1$, tj. $p\le 3 \Rightarrow$ DIV.

• $\lim\limits_{x\to\pi-}\left(\frac{\sin x}{\pi-x}\right)^p \overset{\text{vdaf}}{=} 1$ • $\lim\limits_{x\to\pi-}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x\right) = e^{-\frac{\pi^2}{2}}+1$

v π: srovnání s $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi-x)^p\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} z^p\,dz$ $\quad z=\pi-x$ — $p>-1 \Rightarrow$ KONV. ; $p\leq -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $p>3 \Rightarrow$ KONV.
$p\leq 3 \Rightarrow$ DIV.

---

m) $\int\limits_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 a v ∞

v 0: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o_{x\to 0}(x^3) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+}\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

srovnání: $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^p}}{\frac{x^3}{x^p}} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^p}\,dx$ — $3-p>-1 \Rightarrow$ KONV. ; $3-p\leq -1 \Rightarrow$ DIV.

v ∞: $\frac{x-1}{x^p} \leq \frac{x-\sin x}{x^p} \leq \frac{x+1}{x^p} \Rightarrow$ konvergence je ekvivalentní konvergenci

integrálu $\int\limits_1^\infty \frac{x+\alpha}{x^p} = \int\limits_1^\infty \underbrace{x^{1-p}+\alpha x^{-p}}_{=x^{1-p}\cdot\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)}\,dx$, $\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)\xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ — $1-p<-1 \Rightarrow$ KONV. ; $1-p\geq -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $\int\limits_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^p}\,dx$ KONV. pro $2<p<4$
DIV. pro $p\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$

---

n) $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx$

• $p=0 \Rightarrow$ integrand je konstantní 0 $\Rightarrow$ KONV.

• $p>0$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} px}{px} = 1 \Rightarrow$ srovnání s $\int\limits_0^1 \frac{px}{x^n}\,dx \Rightarrow 1-n>-1 \Rightarrow$ KONV
$1-n\leq -1 \Rightarrow$ DIV.

$n\in\mathbb{N}$, tedy pouze pro $n=1$ je šance na konvergenci

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}}{\frac{1}{x^n}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ srovnání s $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^n} \Rightarrow -n<-1 \Rightarrow$ KONV
$-n\geq -1 \Rightarrow$ DIV.

Tedy DIV i pro $n=1$.

• $p<0$: $\operatorname{arctg} px = -\operatorname{arctg}|p|x$, tedy $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} px}{x^n}\,dx = -\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}|p|x}{x^n}\,dx$,
kterýžto integrál jsme právě vyřešili.

ZÁVĚR: $p=0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ konv.
$p\neq 0,\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ div.

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ ... integrand spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$, problém v 0 i v $\frac{\pi}{2}$.

v 0: $\lim_{x\to 0+} \cos^q x = 1$, $\lim_{x\to 0+} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^p \overset{VoLSF}{=} 1$

srovnání: $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin^p x \cos^q x}{x^p} = 1 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^p$ KONV.

proto: $p > -1 \Rightarrow$ KONV, $p \le -1 \Rightarrow$ DIV.

v $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \sin^p x = 1$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \left(\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^q \overset{VoLSF}{=} 1$

srovnání: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\sin^p x \cos^q x}{(\frac{\pi}{2}-x)^q} = 1 \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^q x \, dx$ KONV $\Leftrightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q$ KONV.

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-x)^q \, dx \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^q \, dy$ ... proto $q > -1 \Rightarrow$ KONV, $q \le -1 \Rightarrow$ DIV.

ZÁVĚR: $(p>-1) \wedge (q>-1) \Rightarrow$ KONV

$(p \le -1) \vee (q \le -1) \Rightarrow$ DIV.

ÚLOHA 3

a) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$, problém v 0 i v ∞

v 0: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\sin x}{x^\alpha}}{x^{1-\alpha}} = 1 \Rightarrow$ srovnání s $\int_0 x^{1-\alpha} \, dx$

$(\sin x \ge 0$ na $(0,\pi))$

Tedy $1-\alpha > -1$, tj. $\alpha < 2 \Rightarrow$ KONV.

$\alpha \ge 2 \Rightarrow$ DIV.

v ∞: AK: $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \le \frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$. $-\alpha < -1 \Rightarrow$ ABS. KONV. (tj. $\alpha > 1$)

NAK: Dirichlet: $\alpha > 0$, pak $\frac{1}{x^\alpha} \searrow 0$ pro $x \to \infty$.

$\forall M>1$: $\left|\int_1^M \sin x \, dx\right| = |\cos 1 - \cos M| \le 2$, tedy částečné integrály jsou omezené

DIV: Je-li $\alpha \le 0$, pak v ∞ není splněna Bolzano-Cauchyova podm.

Skutečně, necht $k \in \mathbb{N}$ zpočtěme $\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \ge ((2k+1)\pi)^{-\alpha} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx =$

$= 2 \cdot ((2k+1)\pi)^{|\alpha|}$

Tedy $\exists \varepsilon > 0$: $\forall x_0 \in (0,\infty)$: $\exists c,d > x_0$, $c<d$: $\int_c^d \frac{\sin x}{x^\alpha} > \varepsilon$

třeba $\varepsilon = 2$

stačí $c = 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $c > x_0$

$d = (2k+1)\pi$

Tedy pro $\alpha \le 0$ integrál v ∞ diverguje

$\neg AK$ pro $\alpha \in (0,1]$: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha} \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,dx = \int_1^\infty \frac{1-\cos 2x}{x^\alpha}\,dx = \underbrace{\int_1^\infty x^{-\alpha}}_{=+\infty} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x^\alpha}}_{\in\mathbb{R}\text{ (konverguje dle Dirichleta)}} = +\infty$

ZÁVĚR DISKUSE: $\alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 2 \Rightarrow DIV$

$0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow NAK,\ \neg AK$

$1 < \alpha < 2 \Rightarrow AK.$

---

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$.

v 0: $\cos x \underset{x\to 0+}{\to} 1 \Rightarrow$ srovnání: $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 1 \Rightarrow$ stačí vyšetřit $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{-\alpha}\,dx$

tedy $\alpha < 1 \Rightarrow KONV$; $\alpha \geq 1 \Rightarrow DIV$.

v ∞: AK: $\left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \Rightarrow \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\cos x}{x^\alpha}\right| dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty x^{-\alpha}\,dx \Rightarrow \alpha > 1 \Rightarrow AK$

NAK: kdykoli $\alpha > 0$, je $x^{-\alpha} \searrow 0$ pro $x \to \infty$

$\forall M > \frac{\pi}{2}$: $\left|\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^M \cos x\,dx\right| = |\sin M - 1| \leq 2 \Rightarrow$ omez. částečné integrály

Dirichlet $\cancel{\Rightarrow}$ dává $\alpha > 0 \Rightarrow NAK$

$\neg AK$: $1 \geq \alpha > 0$: $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{|\cos x|}{x^\alpha}\,dx = \sum_{k=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3}{2}\pi+k\pi} \frac{|\cos x|}{x^\alpha}\,dx \geq \sum_{k=0}^\infty \left(\tfrac{3}{2}\pi + k\pi\right)^{-\alpha} \int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3}{2}\pi+k\pi} |\cos x| =$

$= \displaystyle\sum_{k=0}^\infty (c + k\cdot d)^{-\alpha} \cdot 2 = +\infty \Rightarrow$ pro $\alpha \in (0,1]$ máme $\neg AK$

DIV: Pro $\alpha \leq 0$ není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka, detaily viz. a).

ZÁVĚR DISKUSE: $\alpha \leq 0 \vee \alpha \geq 1 \Rightarrow DIV$

$0 < \alpha < 1 \Rightarrow NAK,\ \neg AK.$

---

c) Řešení je mezi řešeními b) a c) úlohy 2

---

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{1+x}\,dx$ ... integrand spojitý na $[0,\infty)$, problém jen v ∞.

subst. $x^2 + x = y$ $\quad x \in (0,\infty) \overset{bi}{\mapsto} y \in (0,\infty)$

$x = \dfrac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}$

$dx = \dfrac{dy}{\sqrt{1+4y}}$ ... $\dfrac{1}{\sqrt{1+4y}} \in (0,\infty)\ \forall y \in (0,\infty)$

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x+x^2)}{1+x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin y\ dy}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4y}}{2}\right)\sqrt{1+4y}} = \int_0^\infty \frac{\sin y\ dy}{2y + \frac{\sqrt{1+4y}+1}{2}}$ ... spojitý na $[0,\infty)$

$\int_0^\infty \frac{\sin y}{2y + \frac{\sqrt{1+4y}+1}{2}}\,dy$, u ∞: $\frac{1}{2y+\frac{\sqrt{1+4y}+1}{2}} \searrow 0$ pro $y\to\infty$

$\left|\int_0^M \sin y\,dy\right| \le 2$ $\xRightarrow{\text{Dirichlet}}$ NAK.

$\neg$AK: $|\sin y| \ge \sin^2 y = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2y}{2}$

$$\int_0^\infty \frac{|\sin y|}{2y+\frac{\sqrt{1+4y}+1}{2}}\,dy \ge \underbrace{\int_0^\infty \frac{dy}{4y+\sqrt{1+4y}+1}}_{\text{u } \infty \text{ srovnatelné s } \int_1^\infty \frac{dy}{y} = +\infty \ \Rightarrow\ =+\infty} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{\cos 2y}{1+4y+\sqrt{1+4y}}}_{\text{konvergují dle Dirichleta}} = +\infty \Rightarrow \neg\text{AK}.$$

---

e) $\int_0^\infty \sin x^\beta\,dx$, $\beta>1$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$

u 0: $\lim_{x\to 0+} \sin x^\beta \overset{\text{VoLSF}}{=} \lim_{y\to 0+} \sin y = 0$ $\Rightarrow$ konv

u ∞: $\int_1^\infty \sin x^\beta\,dx = \beta^{-1}\cdot \int_1^\infty y^{1/\beta-1}\sin y\,dy$

subst. $y = x^\beta$, $x\in(1,\infty) \xrightarrow[\text{bi}]{} y\in(1,\infty)$

$x = y^{1/\beta}$

$dx = y^{1/\beta-1}\,dy\cdot\frac{1}{\beta}$

$\beta>1 \Rightarrow \frac{1}{\beta}-1<0 \Rightarrow y^{1/\beta-1} \searrow 0$ pro $y\to\infty$

sin y má omez. částečné integrály, tj. $\left|\int_1^M \sin y\,dy\right| \le 2$ $\forall M>1$

Dirichlet $\Rightarrow$ NAK.

$\neg$AK: $$\int_1^\infty y^{1/\beta-1}|\sin y|\,dy \ge \underbrace{\int_1^\infty \frac{y^{1/\beta-1}}{2}\,dy}_{=+\infty} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2y}{2y^{1-1/\beta}}\,dy}_{\text{konv. dle Dirichleta, tedy } \in\mathbb{R}} = +\infty \Rightarrow \neg\text{AK}.$$

---

f) $\int_0^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\sin x\,dx$ ... integrand spojitý na $[0,\infty)$.

u ∞: arccotg: $[0,\infty)\to(0,\frac{\pi}{2}]$ je klesající fce na $[0,\infty)$

sin y je rostoucí na $[0,\frac{\pi}{2}]$, $\Rightarrow$ sin $\circ$ arccotg klesá na $[0,\infty)$

$\lim_{x\to\infty-} \sin(\operatorname{arccotg} x) \overset{\text{VoLSF}}{=} \lim_{y\to 0+} \sin y = 0$

$\forall M>0$: $\left|\int_0^M \sin x\,dx\right| \le 2$, tj. omezené částečné integrály $\xRightarrow{\text{Dirichlet}}$ NAK.

$\neg AK$: $\int_1^\infty |\sin(\operatorname{arccotg} x)|\,|\sin x|\,dx \geq \frac{1}{2}\Big(\int_1^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\,dx - \underbrace{\int_1^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\cos 2x\,dx}_{\text{konv. dle Dirichleta}}\Big)$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^{-1}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = 1$

limitní srovnání s x^{-1}:

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\operatorname{arccotg} x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\operatorname{arccotg} x)}{\operatorname{arccotg} x} \cdot \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^{-1}} \underset{VoLSF}{\overset{VoAL}{=}} 1$

$\int_1^\infty x^{-1}\,dx = \infty \Rightarrow \int_1^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\,dx = \infty \Rightarrow \int_1^\infty \sin(\operatorname{arccotg} x)\,|\sin x|\,dx = +\infty$

---

g) $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \cdot \cos(x^{-\frac{1}{2}}-1)\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$

subst. $x^{-\frac{1}{2}} - 1 = y$ $\quad x \in (0, \frac{1}{4}] \overset{bi}{\longmapsto} y \in [1,\infty)$

$-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} dx = dy$

$\int_0^1 x^{-\frac{3}{2}} \cos(x^{-\frac{1}{2}}-1)\,dx = \int_1^\infty 2\cdot\cos y\,dy = [2\sin y]_1^\infty$ ...NEEX. $\Rightarrow$ DIV

---

h) $\int_0^{1/2} \frac{\cos^3 \ln x}{x \ln x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0, \frac{1}{2}]$

subst. $y = \ln x$ $\quad x \in (0, \frac{1}{2}] \overset{bi}{\longmapsto} y \in (-\infty, -\ln 2]$ $\quad \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{\cos^3 y}{y}\,dy = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{\cos^3 z}{-z}\,dz$

$dy = \frac{dx}{x}$

$\frac{\cos^3 z}{z}$ je spojité na $[\ln 2, \infty)$

v ∞: $\quad \cos^3 z = \frac{1}{4}(\cos 3z + 3\cos z)$ dle Moivreovy věty

$-\int_{\ln 2}^\infty \frac{\cos^3 z}{z}\,dz = \frac{-1}{4}\int_{\ln 2}^\infty \frac{\cos 3z}{z} + \frac{3\cos z}{z}\,dz = \frac{-1}{4}\Big(\int_{\ln 2}^\infty \frac{\cos 3z}{z}\,dz + \int_{\ln 2}^\infty \frac{3\cos z}{z}\,dz\Big)$

NAK dle Dirichleta (standardní úkaz)

$\neg AK$: $|\cos^3 z| \geq \cos^4 z = \frac{(1+\cos 2z)^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2z}{2} + \frac{1}{8} + \frac{\cos 4z}{8}$

$\int_{\ln 2}^\infty \frac{|\cos^3 z|}{z} \geq \underset{+\infty}{\underset{\parallel}{\int_{\ln 2}^\infty \frac{3\,dz}{8z}}} + \underbrace{\int_{\ln 2}^\infty \frac{\cos 2z\,dz}{2z} + \int_{\ln 2}^\infty \frac{\cos 4z}{8z}\,dz}_{\in\mathbb{R},\ \text{neboť konvergují dle Dirichleta}} = +\infty \Rightarrow \neg AK$

i) $\int_0^\infty x^\alpha \ln(1+x)\cos x\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,\infty)$

u 0: $\cos x \to 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ $\Rightarrow$ srovnání s $x^{\alpha+1}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^\alpha \ln(1+x)\cos x}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x}\cdot \cos x \overset{VoAL}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\alpha > -2 \Rightarrow \text{KONV.} \\ \alpha \le -2 \Rightarrow \text{DIV.}\end{array}$$

u ∞: • pro $\alpha \ge 0$ máme $\lim_{x\to\infty} x^\alpha \ln(1+x) = +\infty$, speciálně $\forall x>1$: $x^\alpha \ln(1+x) > \ln 2$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3}{2}\pi+k\pi} |x^\alpha \ln(1+x)\cos x|\,dx \ge \int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3}{2}\pi+k\pi} |\cos x|\cdot \ln 2\,dx = \ln 4 \quad \text{kdykoli } k\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka $\Rightarrow$ DIV.

Nechť $x_0 \in (1,\infty)$, k němu najdu $k\in\mathbb{Z}$: $\frac{\pi}{2}+k\pi > x_0$, pak $\int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{3}{2}\pi+k\pi} |x^\alpha \ln(1+x)|\cdot|\cos x|\,dx \ge \ln 4$

DIV $\Leftarrow$ $\neg$BC

• pro $\alpha<0$ je $x^\alpha \ln(1+x) \searrow 0$ (monotonie od nějakého $x_0\in\mathbb{R}$)

$\cos x$ má omez. částečné integrály. Dirichlet $\Rightarrow$ NAK

• pro $\alpha<-1$: $|x^\alpha \ln(1+x)\cos x| \le x^\alpha \ln(1+x) \le x^{\alpha+\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ malé tak, aby $\alpha+\varepsilon<1$, nerovnost nastává až od nějakého x_1 dále)

AK

• pro $-1\le\alpha<0$: Klasický trik $|\cos x| \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$ dá $\neg$AK.

Závěr:

$\alpha \le -2 \vee \alpha \ge 0 \Rightarrow$ DIV

$-1 \le \alpha < 0 \Rightarrow$ NAK, $\neg$AK

$-2 < \alpha < -1 \Rightarrow$ AK

---

j) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sin^\alpha x}$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{4}]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sin^\alpha x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\cdot\frac{1}{\sin^{\alpha-2} x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}\,dx = (*)$$

na $(0,\frac{\pi}{4}]$ platí: $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sin x\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}$

subst. $y = \frac{1}{\sin x}$

$dy = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

$$(*) = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \sin(y)\cdot y^{\alpha-2}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy$$

Dirichlet $\Rightarrow$ $\alpha-2<0$, tj. $\alpha<2 \Rightarrow$ NAK

srovnání s $y^{\alpha-2} \Rightarrow$ $\alpha-2<-1$, tj. $\alpha<1 \Rightarrow$ AK

$|\sin y| \ge \frac{1}{2}-\frac{\cos 2y}{2} \Rightarrow -1\le\alpha-2<0$, tj. $1\le\alpha<2 \Rightarrow \neg$AK

Bolzano-Cauchy $\Rightarrow$ $\alpha\ge 2 \Rightarrow$ DIV

k) $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^\alpha x \cos(\mathrm{cotg}\, x)\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{4}]$

• $(\mathrm{cotg}\,x)' = -(1+\mathrm{cotg}^2 x) \in (-\infty,0)$ pro $x \in (0,\frac{\pi}{4})$ (i jinde, ale tam je to nezajímavé)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^\alpha x \cos(\mathrm{cotg}\,x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\mathrm{cotg}\,x}\right)^\alpha \cos(\mathrm{cotg}\,x)\,\frac{-(1+\mathrm{cotg}^2 x)}{-(1+\mathrm{cotg}^2 x)}\,dx = (*)$$

subst. $\mathrm{cotg}\,x = y$ $\qquad$ $\mathrm{cotg}: (0,\frac{\pi}{4}] \leftrightarrow [1,\infty)$

$\underbrace{-(1+\mathrm{cotg}^2 x)}_{\in \mathbb{R}\ \forall x \in (0,\frac{\pi}{4})} dx = dy$

$(*) = \int_1^\infty y^{-\alpha} \cos y \,\frac{1}{1+y^2}\,dy$. $\qquad$ $\cos y$ má omez. část. integrály

$\frac{1}{y^{2+\alpha}+y^\alpha} \downarrow 0$ pokud $2+\alpha > 0$, $\alpha > -2$ $\Rightarrow$ NAK (Dirichlet)

~~Pro~~ $|\cos y| \cdot \frac{1}{y^\alpha(1+y^2)} \le \frac{1}{y^\alpha(1+y^2)} \Rightarrow 2+\alpha > 1$, $\alpha > -1$ $\Rightarrow$ AK

• $\alpha \in (-2,-1] \Rightarrow \neg AK$ vzhledem k nerovnosti $|\cos y| \ge \frac{1}{2} + \frac{\cos 2y}{2}$

• $\alpha \le -2 \Rightarrow DIV$, není splněna Bolzano - Cauchyova podmínka.

---

l) $\int_{-1}^1 \sin\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)^\alpha}$ ... integrand je spojitý na $(-1,1)$, problém jak v -1, tak v 1

v -1: $1-x \underset{x\to -1+}{\to} 2$, $1+x \to 0$, $(1-x)^\alpha \to 2^\alpha$, $\frac{\sin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1+x} \to \frac{1}{2}$

srovnání: $\lim_{x\to -1+} \frac{\sin\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^\alpha} \cdot \frac{1}{(1+x)^\alpha}}{(1+x) \cdot \frac{1}{(1+x)^\alpha}} = 2^{-\alpha-1}$ $\Rightarrow$ stačí vyšetřit $\int_{-1} (1+x)^{-\alpha} dx =$

$\begin{pmatrix} \alpha \ge 1 \Rightarrow DIV \\ \alpha < 1 \Rightarrow KONV \end{pmatrix} \Leftarrow \int_0^1 y^{-\alpha} dy$

v 1: $\frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$ $\qquad$ $\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$

$$\int_0^1 \sin\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{(1-x^2)^\alpha} = \int_0^1 \sin\left(-1+\frac{2}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{(1-x)^{\alpha-2}\cdot 2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} \cdot \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = (*)$$

subst. $-1+\frac{2}{1-x} = y$ $\Rightarrow$ $x = \frac{y-1}{y+1}$ $\qquad$ $[0,1) \xrightarrow{bij} [1,\infty)$

$\frac{2}{(1-x)^2}\,dx = dy$

$$(*) = \int_1^\infty \sin y \cdot \frac{1}{2\cdot\left(\frac{2}{y+1}\right)^{\alpha-2}} \cdot \frac{dy}{\left(\frac{2y}{y+1}\right)^\alpha} = 2^{1-2\alpha} \cdot \int_1^\infty \underbrace{\frac{(y+1)^{2\alpha-2}}{y^\alpha}} \cdot \sin y\,dy$$

$\alpha < 2 \Rightarrow$ KLESÁ, a to do nuly ... Dirichlet $\Rightarrow$ NAK

$\alpha = 2 \Rightarrow$ KLESÁ, ale ne do nuly $\Rightarrow$

$\alpha > 2 \Rightarrow$ ROSTE $\Rightarrow$ NEBUDE SPLNĚN BC $\Rightarrow$ DIV

• $\alpha < 1 \Rightarrow AK$, lze porovnat s $y^{\alpha-2}$

• $1 \le \alpha < 2 \Rightarrow \neg AK$ ... standardní trik $|\sin y| \ge \frac{1}{2} - \frac{\cos 2y}{2}$

• pro $\alpha=-2$ existuje $\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^2\frac{1}{y} \overset{VoAL}{\underset{VoLSF}{=}} 1$

$\Rightarrow$ také není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka $\Rightarrow$ DIV.

AK: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\operatorname{tg}^\alpha x \sin\frac{1}{x}|\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^\alpha x\,dx \dots \quad \alpha>-1 \Rightarrow AK$ (srovnávací kritérium $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^\alpha$)

¬AK: $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y}|\sin y|\,dy \ge \int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{y^2}\cdot\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y}}_{\substack{=+\infty \text{ pro } \alpha\le-1 \\ \text{srovnání s } y^{-2-\alpha}}}\cdot\Big(\frac{1}{2}-\frac{\cos 2y}{2}\Big)\,dy = +\infty$ pro $-1\ge\alpha>-2$

konv. dle Dirichleta pro $\alpha>-2$

Závěr:
AK pro $-1<\alpha<1$
NAK pro $-2<\alpha\le-1$
D pro $\alpha\le-2$ nebo $\alpha\ge1$.

---

n) $\int_0^1 x^\alpha \operatorname{arctg} x\cdot\cos\frac{1}{x}$ … integrand spojitý na $(0,1]$

v 0: AK: $\int_0^1 |x^\alpha\operatorname{arctg}x\cos\frac{1}{x}|\,dx \le \int_0^1 x^\alpha\cdot\operatorname{arctg}x\,dx \dots \lim_{x\to0+}\frac{x^\alpha\operatorname{arctg}x}{x^{\alpha+1}}=1$

tedy konv. $\Leftrightarrow \int_0^1 x^{\alpha+1}\,dx$ konv. … $\alpha+1>-1$, $\alpha>-2 \Rightarrow$ AK.

NAK: $\int_0^1 x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x\,\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$

• $\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$ má omez. částečné integrály:
$$\Big|\int_m^1 \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx\Big| = \Big|\int_1^{1/m}\cos y\,dy\Big| \le 2 \qquad \forall m\in(0,1).$$

• monotonie $x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x$ na pravém okolí nuly:
$$(x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x)' = (\alpha+2)x^{\alpha+1}\operatorname{arctg}x + \frac{x^{\alpha+2}}{1+x^2} = \underbrace{x^{\alpha+2}}_{>0}\Big(\underbrace{(\alpha+2)\cdot\frac{\operatorname{arctg}x}{x}+\frac{1}{1+x^2}}_{\xrightarrow{x\to0+}\alpha+3}\Big)$$

$\alpha>-3 \Rightarrow$ roste, $\quad \alpha<-3 \Rightarrow$ klesá

• limita v nule: $\lim_{x\to0+} x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x \xrightarrow{\alpha>-3} 0$, $\xrightarrow{\alpha\le-3} 1$ / ∞

Dle Dirichleta máme NAK pro $\alpha>-3$.

¬AK: $\int_0^1 |x^\alpha\operatorname{arctg}x\cos\frac{1}{x}|\,dx \ge \int_0^1 \underbrace{x^\alpha\operatorname{arctg}x}_{\substack{=+\infty \text{ pro } \alpha\le-2 \\ (\text{srovnání s } x^{\alpha+1})}}\cdot\Big(1+\cos\frac{2}{x}\Big)\,dx = +\infty$ pro $-3<\alpha\le-2$.

konverguje dle Dirichleta pro $\alpha>-3$

D: Pro $\alpha\le-3$ není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka:

$\lim_{x\to0+} x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x > \frac{1}{2} \Rightarrow \int_{(\frac{3\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^{-1}} x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} > \frac{1}{2}\int_{(\frac{3}{2}\pi+2k\pi)^{-1}}^{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^{-1}}\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = 1$

$\Downarrow$

pro $x<x_0$ je $x^{\alpha+2}\operatorname{arctg}x>\frac{1}{2}$

$\Downarrow$ $k\in\mathbb{N}$ volena tak, aby $\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}<x_0$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x \sin\frac{1}{x}\,dx$ ... integrand je spojitý na $(0,\frac{\pi}{2})$.

u $\frac{\pi}{2}$: $\sin\frac{1}{x} \to \sin\frac{2}{\pi} \in (0,1)$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x \to 1-}{\cos x \to 0+}$

$" \frac{\sin x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}$ $\Rightarrow$ srovnání s $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\left(\frac{\sin x}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\right)^\alpha \cdot \sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^\alpha} \underset{\text{VoLSF}}{\overset{\text{VoAL}}{=}} \sin\frac{2}{\pi} \in (0,1) \Rightarrow \text{stačí vyšetřit} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\alpha dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{-\alpha} dx \underset{y=\frac{\pi}{2}-x}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^{-\alpha}\,dy \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -\alpha > -1 \dots \alpha < 1 \Rightarrow \text{KONV} \\ -\alpha \le -1 \dots \alpha \ge 1 \Rightarrow \text{DIV.} \end{array}$$

u 0: $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^\alpha x \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{-x^2}{-x^2}\,dx \underset{y=\frac{1}{x}}{=} \int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty} \operatorname{tg}^\alpha \frac{1}{y} \cdot \sin y \cdot \frac{1}{y^2}\,dy$$

NAK:
- $\sin y$ má omez. část. integrály, tj. $\left|\int_{\frac{4}{\pi}}^{M} \sin y\,dy\right| \le 2 \quad \forall M > \frac{4}{\pi}$
- monotonie $\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y^2}$? (pro $\alpha=0$ triviální ... klesá)

 – vyšetřím monotonii fce $x^2 \operatorname{tg}^\alpha x$ na pravém okolí nuly:

$\alpha \neq 0$: $$(x^2 \operatorname{tg}^\alpha x)' = 2x \operatorname{tg}^\alpha x + \alpha x^2 \operatorname{tg}^{\alpha-1} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = x \operatorname{tg}^{\alpha-1} x \left(2\operatorname{tg} x + \frac{\alpha x}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= \underbrace{\frac{x^2}{\cos x} \operatorname{tg}^{\alpha-1} x}_{>0\ \forall x \in (0,\frac{\pi}{4})} \cdot \underbrace{\left(2 \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\alpha}{\cos x}\right)}_{\text{znaménko nutno vyšetřit.}}$$

$\lim_{x\to0+} \left(2\frac{\sin x}{x} + \frac{\alpha}{\cos x}\right) = 2+\alpha \Rightarrow$ je-li $\alpha > -2$, pak z definice limity existuje pravé okolí nuly, kde je funkce $\left(2\frac{\sin x}{x} + \frac{\alpha}{\cos x}\right)$ nabývá hodnot v intervalu $(2+\alpha-\varepsilon, 2+\alpha+\varepsilon)$. Vhodnou volbou $\varepsilon > 0$ lze zaručit, že $(2+\alpha-\varepsilon) > 0$, tedy na jistém pravém okolí nuly je $\left(2 \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\alpha}{\cos x}\right) > 0$.

Analogicky se zdůvodní, že je-li $\alpha < -2$, pak ex. pravé okolí nuly tak, že $\left(2 \cdot \frac{\sin x}{x} + \frac{\alpha}{\cos x}\right) < 0$.

Tedy pro $\alpha > -2$ je funkce $x^2 \operatorname{tg}^\alpha x$ rostoucí na nějakém pravém okolí nuly. Odtud plyne, že funkce $\frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y}$ je na okolí nekonečna klesající.

Proto pro $\alpha > -2$ je dle Dirichleta $\int_{\frac{4}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y} \cdot \sin y\,dy$ KONV.

Pro $\alpha < -2$ je fce $x^2 \operatorname{tg}^\alpha x$ na pravém okolí 0 klesající $\Rightarrow \frac{1}{y^2}\operatorname{tg}^\alpha\frac{1}{y}$ roste na okolí ∞

$\Rightarrow$ pro $\alpha < -2$ není splněna Bolzano-Cauchyova podmínka $\Rightarrow$ DIV.

o) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}\,dx$ ... integrand spojitý na $(0,1]$.

$\alpha \in \mathbb{R}$: AK: $\int_0^1 \left|\frac{x^\alpha}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}\right|dx \le \int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x-1}\, x^{\alpha-1}\,dx \Rightarrow$ srovnání s $x^{\alpha-1}$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{x}{e^x-1}x^{\alpha-1}}{x^{\alpha-1}} = 1 \quad \ldots \quad \alpha-1>-1$$
$$\alpha>0 \Rightarrow AK$$

NAK: $\int_0^1 \frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1}\, x^{-2}\sin\frac{1}{x}\,dx$

- $x^{-2}\sin\frac{1}{x}$ má omezené částečné integrály:

$$\left|\int_m^1 x^{-2}\sin\frac{1}{x}\,dx\right| = \left|\int_1^{1/m}\sin y\,dy\right| \le 2 \quad \forall m\in(0,1).$$

- $\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1} = \begin{cases} 0 & \alpha>-1 \\ 1 & \alpha=-1 \\ \infty & \alpha<-1\end{cases}$

- monotonie $\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1}$ na pravém okolí nuly (zkoumejme jen $\alpha>-1$):

$$\left(\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1}\right)' = \frac{(\alpha+2)x^{\alpha+1}(e^x-1) - x^{\alpha+2}e^x}{(e^x-1)^2} = \underbrace{\frac{x^{\alpha+2}}{(e^x-1)^2}}_{>0}\cdot\underbrace{\left((\alpha+2)\cdot\frac{e^x-1}{x} - e^x\right)}_{\xrightarrow{x\to 0+}\ \underbrace{\alpha+1}_{>0}}$$

Tedy na jistém pravém okolí nuly je $\left((\alpha+2)\frac{e^x-1}{x}-e^x\right)$ kladný, tudíž na tomto okolí je $\left(\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1}\right)'>0 \Rightarrow$ fce $\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1}$ je rostoucí pro $\alpha>-1$

Dirichlet dává NAK pro $\alpha>-1$.

$\neg$AK: $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \ge \sin^2\frac{1}{x} = \frac{1-\cos\frac{2}{x}}{2}$

$$\int_0^1\left|\frac{x^\alpha}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}\right| \ge \underbrace{\int_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1}\cdot\frac{1}{2}\,dx}_{=+\infty \text{ pro } \alpha\le 0} - \underbrace{\int_0^1\frac{x^\alpha}{e^x-1}\,\frac{\cos\frac{2}{x}}{2}\,dx}_{\text{dle Dirichleta konverguje pro } \alpha>-1} = +\infty \quad \text{pro } -1<\alpha\le 0$$

D: Pro $\alpha\le -1$ je $\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1} < \frac{1}{2} \Rightarrow$ existuje $x_0\in(0,1)$ tak, že
$\forall x\in(0,x_0)$: $\frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1} < \frac{1}{2}$

Nechť $k\in\mathbb{N}$ ~~...~~ takové, aby $x_0 > \frac{1}{(2k+1)\pi}$. Pak:

$$\int_{\frac{1}{(2k+1)\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} \frac{x^{\alpha+2}}{e^x-1}\cdot x^{-2}\sin\frac{1}{x}\,dx > \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{1}{(2k+1)\pi}}^{\frac{1}{2k\pi}} x^{-2}\sin\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin y\,dy = 1$$

Není tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka $\Rightarrow$ divergence.

ZÁVĚR: AK pro $\alpha>0$; NAK pro $-1<\alpha\le 0$; D pro $\alpha\le -1$.